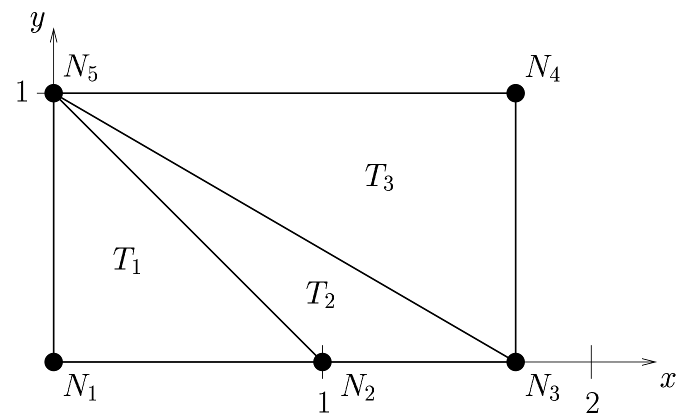
Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar del A, för Kb.

Lösningar till tentamen 2002–01–14.



FIGUR 1. Problem 1. Ursprunglig triangulering.

Problem 1.
(a) Med triangelnumrering enligt Figur 1 fås med Pythagoras' sats och enkel trigonometri:

	Storlek (d.v.s. längsta sidan)	Minsta vinkel
T_1	$\sqrt{2}$	$\pi/4$
T_2	2	$\pi/12$
T_3	2	$\pi/6$

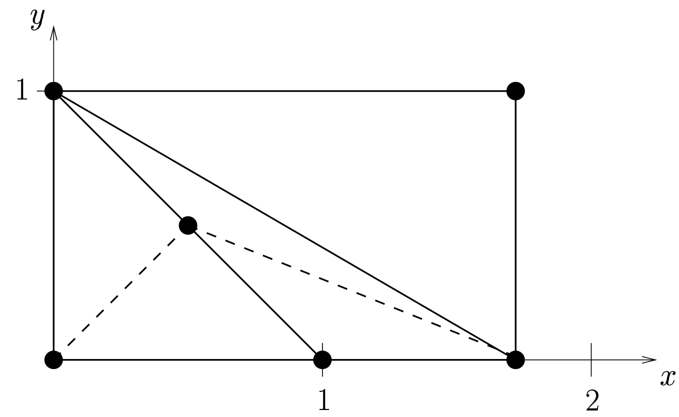
(b) Med nod- och triangelnumrering enligt Figur 1 fås

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Kommentar: Rad nummer 4 i matrisen t innehåller numren på de delområden respektive triangel tillhör. Dessa betecknas ovan med "*".
(c) Först förfinas T_1 genom att en ny kant insättes från mittpunkten på den längsta sidan till motstående hörn. Eftersom detta introducerar en s.k. "hängande nod" i punkten (0.5, 0.5) måste därefter även T_2 förfinas. Den resulterande trianguleringen blir därmed som i Figur 2.
(d) Eftersom det finns en basfunktion associerad med varje nod blir dimensionen av V_h på den ursprungliga trianguleringen lika med 5 och på den förfinade trianguleringen lika med 6.
(e) $\varphi_1(x, y) = \begin{cases} 1-(x+y), & (x, y) \in T_1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$

Problem 2.
(a) Vi har följande (inre) noder: N_1 i punkten $x = 1/3$ och N_2 i punkten $x = 2/3$. En *bas* för V_h^0 utgörs av de associerade hattfunktionerna $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset V_h^0$, där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ 2-3x, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 0, & 2/3 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3, \\ 3x-1, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 3-3x, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$



FIGUR 2. Problem 1(c). Förfinad triangulering.

Därmed fås *interpolanten* $\pi_h f \in V_h^0$ som

$$\pi_h f(x) = f(\frac{1}{3})\,\varphi_1(x) + f(\frac{2}{3})\,\varphi_2(x) = -\frac{2}{9}\,\varphi_1(x) - \frac{2}{9}\,\varphi_2(x) = \begin{cases} -2x/3, & 0 \le x \le 1/3, \\ -2/9, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 2x/3 - 2/3, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Enligt definition av L_2-*projektion* är $P_h f \in V_h^0$ den (entydigt bestämda) funktion som uppfyller

$$\int_0^1 P_h f\, v\, dx = \int_0^1 f\, v\, dx, \quad \forall v \in V_h^0. \tag{1}$$

Eftersom $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset V_h^0$ är en *bas* för V_h^0 är (1) ekvivalent med

$$\int_0^1 P_h f\, \varphi_i\, dx = \int_0^1 f\, \varphi_i\, dx, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Ansätt

$$P_h f(x) = c_1\, \varphi_1(x) + c_2\, \varphi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Insättning av (3) i (2) ger

$$\sum_{j=1}^{2} c_j \underbrace{\int_0^1 \varphi_j\, \varphi_i\, dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 f\, \varphi_i\, dx}_{b_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

På matrisform skrivs (4)

$$Mc = b. \tag{5}$$

Vi beräknar

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f\, \varphi_1\, dx \\ \int_0^1 f\, \varphi_2\, dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^{1/3} x(x-1)\, 3x\, dx \; + \; \int_{1/3}^{2/3} x(x-1)\,(2-3x)\, dx \\ \int_{1/3}^{2/3} x(x-1)\,(3x-1)\, dx \; + \; \int_{2/3}^{1} x(x-1)\,(3-3x)\, dx \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -11/162 \\ -11/162 \end{bmatrix},$$

där $b_1 = b_2$ av symmetriskäl. Vidare beräknas

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\,\varphi_1\,dx & \int_0^1 \varphi_2\,\varphi_1\,dx \\ \int_0^1 \varphi_1\,\varphi_2\,dx & \int_0^1 \varphi_2\,\varphi_2\,dx \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^{1/3}(3x)^2\,dx \,+\, \int_{1/3}^{2/3}(2-3x)^2\,dx & \int_{1/3}^{2/3}(3x-1)\,(2-3x)\,dx \\ \int_{1/3}^{2/3}(2-3x)\,(3x-1)\,dx & \int_{1/3}^{2/3}(3x-1)^2\,dx \,+\, \int_{2/3}^{1}(3-3x)^2\,dx \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2/9 & 1/18 \\ 1/18 & 2/9 \end{bmatrix},$$

där $m_{11} = m_{22}$ av symmetriskäl (och självfallet så är $m_{12} = m_{21}$). Slutligen löser vi (5):

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M^{-1}b = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(2/9)^2 - (1/18)^2} \begin{bmatrix} 2/9 & -1/18 \\ -1/18 & 2/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11/162 \\ -11/162 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/45 \\ -11/45 \end{bmatrix},$$

d.v.s.

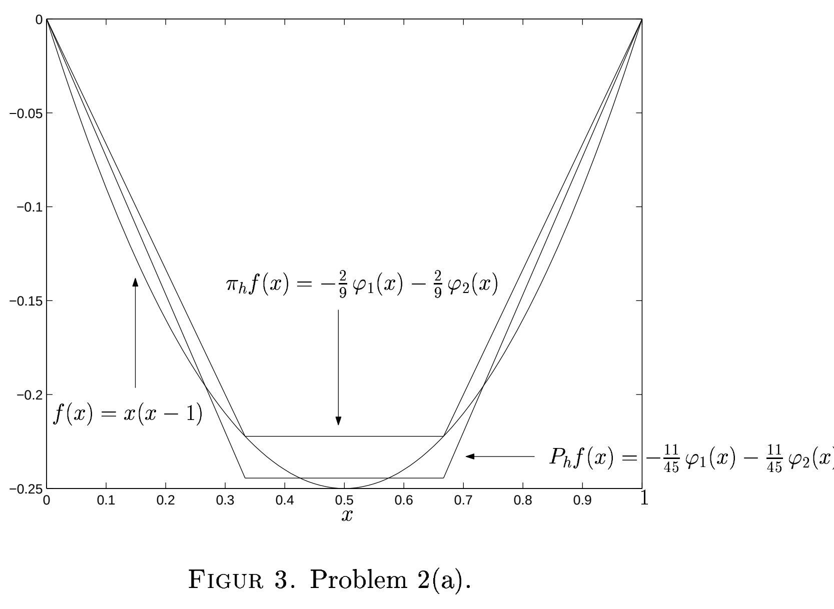
$$P_h f(x) = -\frac{11}{45}\,\varphi_1(x) \,-\, \frac{11}{45}\,\varphi_2(x) = \begin{cases} -11x/15, & 0 \le x \le 1/3, \\ -11/45, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 11x/15 - 11/15, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Se Figur 3.

(b) $||f||_{L_\infty(I)} = \max_{x\in I}|f(x)| = 1/4$, $\quad ||f||_{L_2(I)} = (\int_I f(x)^2\,dx)^{1/2} = (\int_0^1 x^2(x-1)^2\,dx)^{1/2} = 1/\sqrt{30}$.

(c) –

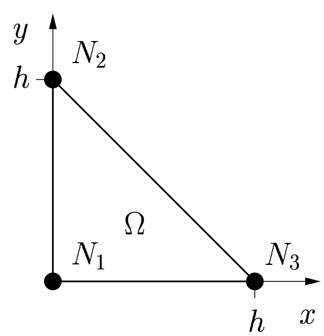
(d) –



FIGUR 3. Problem 2(a).

Problem 3.
(a) –
(b) –
(c) $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$; $\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -y^2\sin(xy) - x^2\sin(xy) = -(x^2+y^2)\sin(xy)$; $\nabla \cdot (x\nabla f) = \nabla \cdot (xy\cos(xy), x^2\cos(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(xy\cos(xy)) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2\cos(xy)) = y\cos(xy) - xy^2\sin(xy) - x^3\sin(xy) = y\cos(xy) - x(x^2+y^2)\sin(xy)$; $b \cdot \nabla f = (1, 1) \cdot (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y\cos(xy) + x\cos(xy) = (x+y)\cos(xy)$.
(d) Eftersom $\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ medför randvillkoret $u = 0$ på $\partial\Omega$ att $(\alpha - 1)/4 = 0$, d.v.s. $\alpha = 1$. Alltså är $u = (1 - x^2 - y^2)/4$ vilket, eftersom $a = c = 1$, ger $f = -\Delta u + u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1/2 + 1/2 + (1 - x^2 - y^2)/4 = 1 + (1 - x^2 - y^2)/4$.
(e) –

Problem 4.
(a) –
(b) –
(c) –
(d) –



FIGUR 4. Problem 5.

Problem 5. Låt $\mu(\Omega) = h^2/2$ beteckna arean av Ω. Se Figur 4.
(a) Med kvadratur baserad på integrandens värden i triangelsidornas mittpunkter, vilken är exakt för andragradspolynom, fås[1]

$$m_{11} = \iint_\Omega \varphi_1 \varphi_1 \, dx \, dy = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times 0}{3} \mu(\Omega) = h^2/12.$$

Av symmetriskäl blir också de övriga elementen i massmatrisens huvuddiagonal

$$m_{22} = m_{33} = h^2/12.$$

Vidare fås

$$m_{12} = \iint_\Omega \varphi_2 \varphi_1 \, dx \, dy = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0}{3} \mu(\Omega) = h^2/24,$$

och av symmetriskäl

[1] Observera att eftersom tältfunktionerna är *linjära* funktioner på Ω är deras värden i triangelsidornas mittpunkter antingen $1/2$ eller 0.

$$m_{21} = m_{13} = m_{31} = m_{23} = m_{32} = h^2/24.$$

(b) Notera först att explicita uttryck för tältfunktionerna på Ω ges av

$$\varphi_1(x,\, y) = 1 - \frac{x+y}{h}, \quad \varphi_2(x,\, y) = \frac{y}{h}, \quad \varphi_3(x,\, y) = \frac{x}{h},$$

vilket ger

$$\nabla\varphi_1 = (-\frac{1}{h},\, -\frac{1}{h}), \quad \nabla\varphi_2 = (0,\, \frac{1}{h}), \quad \nabla\varphi_3 = (\frac{1}{h},\, 0).$$

Därmed fås

$$a_{11} = \iint_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \, dx\, dy = \iint_\Omega (-\frac{1}{h},\, -\frac{1}{h}) \cdot (-\frac{1}{h},\, -\frac{1}{h}) \, dx\, dy = \frac{2}{h^2}\,\mu(\Omega) = 1,$$

$$a_{22} = \iint_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx\, dy = \iint_\Omega (0,\, \frac{1}{h}) \cdot (0,\, \frac{1}{h}) \, dx\, dy = \frac{1}{h^2}\,\mu(\Omega) = 1/2,$$

och av symmetriskäl

$$a_{33} = 1/2.$$

Vidare fås

$$a_{12} = \iint_\Omega \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_1 \, dx\, dy = \iint_\Omega (0,\, \frac{1}{h}) \cdot (-\frac{1}{h},\, -\frac{1}{h}) \, dx\, dy = -\frac{1}{h^2}\,\mu(\Omega) = -1/2,$$

$$a_{23} = \iint_\Omega \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_2 \, dx\, dy = \iint_\Omega (\frac{1}{h},\, 0) \cdot (0,\, \frac{1}{h}) \, dx\, dy = 0,$$

och av symmetriskäl

$$a_{21} = a_{13} = a_{31} = -1/2, \quad a_{32} = 0.$$

(c) Notera att

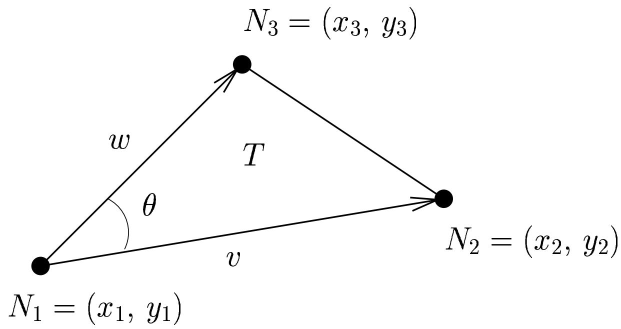
$$b_i = \iint_\Omega \varphi_i \, dx\, dy, \quad i = 1,\, 2,\, 3,$$

geometriskt är *volymen* under "tält" φ_i. Alltså blir

(6) $$b_1 = b_2 = b_3 = \frac{\overbrace{\mu(\Omega)}^{\text{“basyta”}} \times \overbrace{1}^{\text{“höjd”}}}{3} = h^2/6,$$

från formeln för volymen av en pyramid[2].

[2] *Kommentar:* Ekvation (6) är förstås precis det uttryck som du erhåller ifall du t.ex. använder kvadratur baserad på integrandens värden i triangelns hörn, vilken är exakt för förstagradspolynom.



FIGUR 5. Problem 6.

Problem 6. Låt $\mu(T)$ beteckna arean av triangeln. Låt vidare v beteckna vektorn från N_1 till N_2, och w vektorn från N_1 till N_3. Kalla slutligen vinkeln mellan v och w för θ. Se Figur 5.
(a) $\mu(T) = \frac{|v|\,|w|\sin(\theta)}{2} = \frac{v \times w}{2} = \frac{(x_2-x_1,\, y_2-y_1) \times (x_3-x_1,\, y_3-y_1)}{2} = \frac{(x_2-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y_2-y_1)}{2}$.
(b) Eftersom φ_1 är linjär på T gör vi ansatsen $\varphi_1(x,\, y) = Ax + By + C$. Därmed blir $\nabla\varphi_1 = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial x},\, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}) = (A,\, B)$ och vi har löst problemet ifall vi kan bestämma A och B. Om vi nu utnyttjar att $\varphi_1(N_1) = 1$ och $\varphi_1(N_2) = \varphi_1(N_3) = 0$, erhålls det linjära ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
&(7) \qquad & Ax_1 + By_1 + C &= 1, \\
&(8) \qquad & Ax_2 + By_2 + C &= 0, \\
&(9) \qquad & Ax_3 + By_3 + C &= 0.
\end{aligned}
$$

Eftersom vi i första hand är intresserade av att bestämma A och B eliminerar vi C genom att multiplicera ekvation (7) med -1 och addera till ekvationerna (8) och (9), vilka därmed övergår i

$$
\begin{aligned}
&(10) \qquad & A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) &= -1, \\
&(11) \qquad & A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) &= -1.
\end{aligned}
$$

Ekvationerna (10) och (11) kan skrivas på matrisform

$$
\overbrace{\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}}^{M} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},
$$

med lösning

$$
\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \; - \; (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}_{\det M}} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} =
$$

$$
\frac{1}{2\,\mu(T)} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}.
$$

Problem 7.
(a) Bakåt Euler: givet ξ^0, lös

$$
M \frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{\Delta t} + A\,\xi^n = b, \quad n = 1,\, 2,
$$

d.v.s.

$$\overbrace{(M + \Delta t\, A)}^{C}\, \xi^n = M\xi^{n-1} + \Delta t\, b, \quad n = 1,\, 2,$$

där $\Delta t = 1/2$ och $C = M + \Delta t\, A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Bestäm först ξ^1:

$$C\xi^1 = M\xi^0 + \Delta t\, b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\xi^1 = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{3 \times 5 - 2 \times 7}_{\det C}} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm nu ξ^2:

$$C\xi^2 = M\xi^1 + \Delta t\, b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\xi^2 = C^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{3 \times 5 - 2 \times 7}_{\det C}} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 7 \end{bmatrix},$$

vilket är en approximation till $\xi(1)$.
(b) –