Lösningar till TMA750 000304 (nya kursen)

.

1. Se EM2000.

2. D är ett slutet och begränsat område och f är Lipschitzkontinuerlig på D så f antar största och minsta värde på D. Dessa återfinns i stationära punkter $\nabla f = 0$ i D eller i punkter på randen till D.

Stationära punkter: $\nabla f = 0$ i punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$. Dessa är kandidater.

Randen: (1) $x_2 = 0$, $0 \leq x_1 \leq 4$. $f(x_1, 0) = x_1^3$ som växer strikt och har minsta värde i $(0,0)$ och största värde i $(4,0)$. $(4,0)$ ny kandidat.
(2) $x_1 = 4$, $0 \leq x_2 \leq 8$. $f(4, x_2) = 64 - 12x_2 + x_2^3$ som har stationär punkt i $(4,2)$. Denna och ändpunkten $(4,8)$ nya kandidater.
(3) $x_2 = 2x_1$, $0 \leq x_1 \leq 4$, $f(x_1, 2x_1) = 9x_1^3 - 6x_1^2$ som har stationära punkter i $(0,0)$ och $(4/9, 8/9)$. $(4/9, 8/9)$ ny kandidat. Hörnen och stationära punkter i D och på dess rand återfinns nu bland kandidaterna. Jämförelse av funktionsvärden ger $f_{max} = 480$ i $(4,8)$ och $f_{min} = -1$ i $(1,1)$.

3. Sadelns yta parametriseras som $S : s(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2)$, med $(x_1, x_2) \in D : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Arean ges av

$$A = \int_S ds = \int_D |s'_{x_1} \times s'_{x_2}| dx_1 dx_2.$$

Övergång till polära koordinater ger

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \pi(5^{3/2} - 1)/6.$$

4. Vi noterar att F är ett potentialfält med potential $\varphi = 1/\|x\|$ varvid integralens värde är entydigt bestämt av potentialens värde i Γ's ändpunkter. Vi får

$$I = \varphi(0,1) - \varphi(4,0) = \frac{3}{4}.$$