PROBLEM

IX. Dubbelintegraler

1. Beräkna, m.h.a itererad integration, dubbelintegralerna

a.

$$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dxdy.$$

b.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos y\, dxdy.$$

c.

$$\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dxdy.$$

2. Beräkna dubbelintegralerna

a.

$$\iint_R xe^{xy}\, dxdy, \quad R = [0,1] \times [0,1].$$

b.

$$\iint_R \frac{dxdy}{x+y}, \quad R = [1,2] \times [0,1].$$

3. Antag, att arean av området Ω är 10 och att

$$\iint_\Omega x\, dxdy = 2, \qquad \iint_\Omega y\, dxdy = 7.$$

Vad blir värdet av dubbelintegralen

$$\iint_\Omega (3x + 5y - 2)\, dxdy.$$

4. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_{\Delta} y\cos(xy)\,dxdy,$$

där Δ är rektangeln $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi/2$.

5. Beräkna

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{(1+xy)^2}\,dxdy,$$

där Δ är rektangeln $1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 1$.

6. Beräkna

$$\iint_{D} \frac{y}{x}\,dxdy,$$

om D är det område som ligger mellan linjerna $x = 1$, $x = 4$ och mellan $y = x$ och $y = 3x$.

7. Beräkna

$$\iint_{K} (3x + 18y)\,dxdy,$$

där K är det område som begränsas av linjerna $x = 1$, $x = 3$, $y = -2x/3 + 4$ och $y = x/3$.

8. Beräkna

$$\iint_{B} (x + 2y)\,dxdy,$$

där B är den mängd som begränsas av $x = 0$, $y = 0$ och $y = 2 - x$.

9. Beräkna

$$\iint_{D} (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

där D är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.

X. Greens formel i planet

1. Beräkna kurvintegralen[1]

$$\oint_{\Gamma} (x^2y^3 + x)dx + (y^2x^3 + y)dy,$$

då Γ är ellipsen $9x^2 + 4y^2 = 1$.

[1] I boken (AMBS) skiljer man på kurv- och linjeintegral på så sätt att en kurvintegral har vi när vi integrerar en skalär funktion och linjeintegral ett vektorfält. Denna benämning är inte allmängiltig och i övningarna nedan används bägge namnen.

2. Låt $F = (2x + y, 3y^2)$ vara ett kraftfält i planet och C den positivt orienterade randkurvan till triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 2)$ och $(-1, 2)$. Beräkna m.h.a. Greens formel kurvintegralen

$$\oint_C F \cdot dr = \oint_C (2x + y, 3y^2) \cdot (dx, dy).$$

3. Beräkna kurvintegralen

$$\oint_\Gamma x^2 dx + xydy,$$

då Γ är randen av kvadraten med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ och $(0, 1)$, genomlöpt ett varv moturs.

4. Låt vektorfältet $F = (F_1, F_2)$ ha komponenterna $F_1 = x - y$ och $F_2 = x + y$ och låt R vara cirkelskivan, som begränsas av enhetscirkeln $C : (\cos t, \sin t)$ där $0 \leq t \leq 2\pi$.

   a. Beräkna, m.h.a. parametriseringen av C, kurvintegralen

   $$\oint_C F_1 dx + F_2 dy.$$

   b. Beräkna dubbelintegralen

   $$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

5. Låt D vara triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 3)$. Beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\partial D} (3x^2 + y)dx + 5xdy,$$

där ∂D betecknar den moturs orienterade randen till D.

6. Använd Greens formel för att beräkna linjeintegralen

$$\oint_{\partial D} xydx + xdy, \quad D = [1, 3] \times [2, 5].$$

7. Visa, m.h.a. Greens formel att arean av en yta Ω i xy-planet ges av kurvintegralen

$$A = \frac{1}{2} \oint_\Gamma xdy - ydx,$$

där Γ betecknar den positivt orienterade randen till Ω.

8. Beräkna arean av ellipsen, som begränsas av kurvan $\Gamma : (x, y) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9. Beräkna

$$\oint_\Gamma \ln(x^2 + 1)dx + xydy,$$

där Γ är den moturs orienterade randen till triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.

10. Beräkna

$$\oint_\Gamma (1 + x + y^2)e^{x+y}dx + (x + 2y + y^2)e^{x+y}dy,$$

om Γ är enhetscirkeln.

XI. Variabeltransformationer vid dubbelintegraler

1. Beräkna volymen av den del av paraboloiden $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

2. Beräkna arean av en cirkulär skiva med radien R.

3. Beräkna massan av en halvcirkelformad skiva med radie 1, vars densitet varierar såsom $1 - r$ i polära koordinater.

4. Använd polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

5. Använd transformationen $x = 3u - 2v$, $y = u + v$ för att beräkna

$$\iint_R (2x - y)dxdy,$$

där R är regionen som begränsas av linjerna $x + 2y = 0$, $x + 2y = 10$, $3y - x = 0$ och $3y - x = 5$.

6. Använd transformationen $u = x + 2y$, $v = x - 2y$ för att beräkna

$$\iint_R (3x + 6y)^2 dxdy,$$

där R är regionen som begränsas av linjerna $x - 2y = -2$, $x + 2y = 2$, $x + 2y = -2$ och $x - 2y = 2$.

7. Integrera funtionen $x + y$ över området R, som begränsas av linjerna $x = 0$ och $y = 0$ samt cirkelbågen $x^2 + y^2 = 4$. *Ledning:* byt till polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

8. Beräkna

$$\iint_K e^{x-y} dxdy,$$

där K är kvadraten som begränsas av linjerna $x - y = 1$, $x + y = 1$, $x + y = -1$ och $x - y = -1$. *Ledning:* gör variabelsubstitutionen $u = x + y$, $v = x - y$.

9. Beräkna

$$\iint_D (x^4 - y^4) dxdy,$$

där D är området som begränsas av kurvorna $1 \leq x^2 - y^2 \leq 2$ och $1 \leq xy \leq 2$. *Ledning:* gör variabeltransformationen $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

Svar

IX. Dubbelintegraler

1. a) 10
b) 1
c) $\frac{21}{2}\ln 2$

2. a) $e-2$
b)

$$\begin{aligned}\int_1^2\int_0^1 \frac{dxdy}{x+y} &= \int_1^2 [\ln(x+y)]_0^1\, dy = \int_1^2 (\ln(1+y)-\ln y)\, dy \\ &= [(y+1)\ln(y+1)-(y+1)-(y\ln y - y)]_1^2 = \ln(27/16)\end{aligned}$$

3. $3\cdot 2+5\cdot 7-2\cdot 10=21$

4. 1

5. $2-\ln 2$

6. 30

7. 144

8. 4

9. 1/3

X. Greens formel i planet

1. 0. Sätt $P=x^2y^3+x$ och $Q=y^2x^3+y$ och låt Ω vara ellipsen, som innesluts av kurvan Γ. Då är $\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y=0$ och p.g.a. Greens formel

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

ser vi att den sökta kurvintegralen försvinner.

2. -2

3. 1/2

4. 2π

5. 12

6. -6

7. Sätt $P = -y$ och $Q = x$. Arean A av ytan Ω ges av

$$A = \iint_\Omega dxdy = \frac{1}{2}\iint_\Omega 2dxdy = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \frac{1}{2}\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy - ydx.$$

8. πab

9. $1/6$

10. 0

XI. Variabeltransformationer vid dubbelintegraler

1. 28π

2. π

3. $\pi/6$

4. $\pi(2-\sqrt{3})/2$

5. 25

6. 48

7. $16/3$

8. $e - 1/e$

9. $3/4$