Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–12–15

Telefon: Erik Broman: 0762–721860 (M. Asadzadeh 772 35 17)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i (det nya) Matematiskt Centrum.

1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$.

2. Formulera fundamentalsatsen.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^y \big(\sin^3(x) - \sin(x)\big)\,dx$.

4. Redogör för hur man beräknar integralen i uppgift 3 med programmet `my_ode.m` för $y \in [0,3]$. Ange alla detaljer: m-fil, MATLAB-kommando.

5. Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\exp(2x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem for general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u)
%   Syntax:
%           [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen funk.m innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 -1;1 0];
y=A*x;
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>> [t,U]=my_ode('funk', [0, 6], [1; 0], 0.1); plot(t,U)
```

Vilket begynnelsevärdesproblem löser vi? Skriv ned den analytiska lösningen.

7. Lös begynnelsevärdesproblemet (a och b konstanter) $\begin{cases} u'(t) + au(t) = b, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) + 4u(t) = 0; \quad u(0) = 3, \quad u'(0) = 5.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 1. \end{cases}$

10. Lös begynnelsevärdesproblemet $u(t)u'(t) = t, \quad t \geq 1; \quad u(1) = 2.$

---

11. Låt p vara en parameter (reellt tal) och

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ p \end{bmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

(a) För vilka värden på p är ekvationssystemet $Ax = b$ lösbart?

(b) Är lösningen i (a) unik?

(c) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(d) Bestäm en bas för nollrummet $N(A)$.

(e) Beräkna $\det(A)$.

12. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'' + au = 0, \qquad a > 0, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Visa att om u löser (1) så gäller

$$\tfrac{1}{2}\big(u'(t)^2 + au(t)^2\big) = \tfrac{1}{2}\big(u_1^2 + au_0^2\big).$$

(b) Använd resultatet i 12(a) för att visa att (1) har högst en lösning. Varför är det viktigt att veta att lösningen är unik?

(c) Lös problemet analytiskt. Jämför med lösningen i problem 8 där a, u_0 och u_1 är givna.

(d) Hur löser man (1) med `my_ode`?

13. (a) Ange villkor som garanterar att en funktion $y = f(x)$ är inverterbar.

(b) För vilka x värden är funktionerna $\sin(x)$ och $\tan(x)$ inverterbara?

(c) Ange definitionsmängderna för $\arcsin(x)$ och $\arctan(x)$ och rita deras grafer.

(d) Visa att logaritmen är invers funktion till exponentialfunktionen. Ange både definitions- och värdemängderna för $\log(x)$ och $\exp(x)$.

(e) Definiera funktionen a^x, $(a > 0)$.

MA

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–12–15. Lösningar.

1.

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \Big[\log|1+x^2|\Big]_0^1 = \log 2 - \log 1 = \log 2.$$

2. Se Boken!

3.

$$\begin{aligned}\int_0^y \big(\sin^3(x) - \sin(x)\big)\,dx &= \int_0^y [\big(1-\cos^2(x)\big)\sin(x) - \sin(x)]\,dx \\ &= \int_0^y \cos^2(x)(-\sin(x))\,dx = \frac{1}{3}[\cos^3(x)]_0^y = \frac{1}{3}(\cos^3(y) - 1).\end{aligned}$$

4. MATLAB funktionsfil:

```
function y=funk(t,u)
y=(sin(t))^{3}-sin(t);
```

MATLAB-kommando:

```
>> [x,U]=my_ode('funk', [0, 3], 0, 1e-2); plot(x,U)
```

5. Taylor polynom av gard 3 för funktionen $f(x)$ i punkten $\bar{x} = 0$:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Med $f(x) = \exp(2x)$ får vi $f'(x) = 2\exp(2x)$, $f''(x) = 4\exp(2x)$, $f'''(x) = 8\exp(2x)$. Alltså Taylor polynomet är

$$1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3.$$

6. $w' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w$, med data $w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och lösning $w_1(t) = \cos(t)$, $w_2(t) = \sin(t)$.

7.

$$u(t) = u_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} b\,ds = u_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) = (u_0 - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a}.$$

8. $u(t) = 3\cos(2t) + \frac{5}{2}\sin(2t)$

9. $u(1) = (1+2t)e^{-t}$

10. $u(t) = \sqrt{t^2+3}$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ p \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \,|\, b]$ till radreducerad trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \,|\, \hat{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3/2 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & p-4 \end{bmatrix}.$$

Varför problemet är lösbart endast om $p = 4$.

(b) Nej! Med $p = 4$, tredje raden i reducerad form kan skrivas (t.ex.) som $0 \times x_3 = 0$. Dvs variablen x_3 är fri: $x_3 = s$. De andra två är bundna och vi har $x_2 = -3 + 3/2s,\ x_1 = 8 - 3s$, så att lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså för $p = 4$ finns det oändlig många lösningar.

(c) Pivotkolonnerrna, dvs ne 1 och 2, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1 och 2 i A en bas för $R(A)$, dvs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(d) Nollrumment till A och $\hat{A}$ äro detsamma. För att bestämma en bas för nollrummet till A löser vi $\hat{A}x = 0$. Dvs

$$[\hat{A} \,|\, \hat{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

vilket innbär att; se (b)

$$x = s \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså nollrummet har dimension 1 och en bos för $N(A)$ är

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = cdet(\hat{A}) = 0$. Alltså A är singulär, kolonnerna i A är linjärt beroende, $R(A) \subset \mathbb{R}^3$ och $N(A) \neq 0$. Dvs $Ax = b$ kan inte lösas för alla $b \in \mathbb{R}^3$.

12. (a) Multiplicera ekvationen med u' så fås

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}((u')^2 + au^2) = u''u' + auu'' = 0,$$

så att

$$\frac{1}{2}((u')(t)^2 + au(t)^2) = \frac{1}{2}((u')(0)^2 + au(0)^2) = \frac{1}{2}(u_1^2 + au_0^2).$$

(b) Om det skulle finnas två lösningar u och v, dvs om

$$\begin{aligned} &u'' + au = 0, && v'' + av = 0 \\ &u_0 = u_0,\ \ u'(0) = u_1, && v_0 = u_0,\ \ v'(0) = u_1, \end{aligned}$$

så uppfyller skillnaden $w = u - v$ begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &w'' + aw = 0, \\ &w(0) = 0,\ \ w'(0) = 0. \end{aligned}$$

Resultatet i (a) ger då

$$\frac{1}{2}((w')(t)^2 + aw(t)^2) = \frac{1}{2}((w')(0)^2 + aw(0)^2) = \frac{1}{2}(w_1^2 + aw_0^2) = 0.$$

dvs $w(t) = 0$ och därmed $u(t) = v(t)$, dvs lösningen är unik. Det är viktigt att veta att lösningen är unik, för det betyder att alla konstruktioner av lösning ger samma resultat.

(c) Karakteristiska ekvationen: $r^2 + a = 0$ har komplexa rötterna $r_{1,2} = \pm i\sqrt{a}$. Så lösningen kan uttryckas som

$$u(t) = C_1 \cos(\sqrt{a}t) + C_2 \sin(\sqrt{a}t),$$

där

$$u(0) = u_0 \Longrightarrow C_1 = u_0, \quad \text{och} \quad u'(0) = u_1 \Longrightarrow C_2 = \frac{u_1}{\sqrt{a}}.$$

Alltså

$$u(t) = u_0 \cos(\sqrt{a}t) + \frac{u_1}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}t).$$

Uppgift (8) är specialfall med $a = 4$, $u_0 = 3$ och $u_1 = 5$.

(d) Man skriver en fil `funk.m` som innehåller:

```
function y=funk(t,x)
a=4;
A=[0 1;-a 0];
y=A*x;
```

Sedan skriver man

```
>> u0=0;  u1=1;
>> [t,U]=my_ode('funk', [0, 10], [u0; u1], 0.1); plot(t,U)
```

13. (a) f måste vara monoton (strängt växande eller strängt avtagande) funktion.

(b) Marcsin(x) är inverterbar för $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. arctan(x) är inverterbar för $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(c) arcsin(x) har definitionsmängen $[-1, 1]$. arctan(x) har definitionsmängen $(-\infty, \infty)$.

(d) Se boken.

(e) Se boken.

MA