Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–08–23

Telefon: Georgios Foufas 0702–740902 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

1. Vilka steg ingår i beviset av fundamentalsatsen?

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^y \cos^3(x)\,dx$.

3. Redogör för hur man beräknar integralen i uppgift 2 med programmet `my_ode` för $y \in [0,5]$. Ange alla detaljer: m-fil, MATLAB-kommando.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{x-3}\,dx$. För vilka t är integralen definierad?

5. Ange Taylors polynom av grad 4 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
a=int(1); b=int(2);
i=1;
t(1)=a;
U(:,1)=ua;

while t(i)<b
  i=i+1;
  t(i)=t(i-1)+h;
  U(:,i)=U(:,i-1)+h*feval(f, t(i-1), U(:,i-1));
end

U=U';
t=t';
```

Filen `funk.m` är

```
function y=funk(t,x)
y=x;
```

Skriv ned alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode('funk',I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t)+3u(t)=5, \\ u(0)=2. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) + 25u(t) = 0, \quad u(0) = 7,\ u'(0) = 2.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u' = u(1-u), \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0. \end{aligned}$$

10. Ge ett exempel vardera av följande typer av differentialekvationer:

1. Icke-linjär.
2. Linjär homogen av första ordningen.
3. Linjär inhomogen av andra ordningen.

---

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär? Är kolonnerna i A linjärt oberoende?

(e) Visa att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) Lös (analytiskt) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' + 2u' + 10u = 0, \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned}$$

(b) Visa att $|u(t)| \leq \frac{4}{3}|u_0| + \frac{1}{3}|u_1|$ för $t \geq 0$.

(c) Skissa grafen till u då $u_0 = 1,\ u_1 = -1$.

(d) Beskriv hur man går tillväga för att lösa begynnelsevärdesproblemet med hjälp av det MATLAB-program som du själv skrivit.

13. (a) Beskriv hur vi definierar (konstruerar) logaritmfunktionen $\log(x)$. Vad är dess definitionsmängd?

(b) Använd definitionen för att bevisa att logaritmen är en växande funktion.

(c) Använd definitionen för att bevisa att logaritmen är invers funktion till exponentialfunktionen.

(d) Använd definitionen för att bevisa den grova uppskattningen $1 < \log(4) < 2$.

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2005–08–23. Lösningar.

---

1. 1. Vi konstruktionerar en följd $U^n(x)$ enligt algoritmen: $U^n(x_i^n) = U^n(x_{i-1}^n) + h_n f(x_{i-1}^n)$.
2. Vi visar konvergens: $U^n(x)$ är en Cauchy-följd med gränsvärde $u(x)$.
3. Vi visar att u löser begynnelsevärdesproblemet.
4. Vi visar entydighet: begynnelsevärdesproblemet har bara en lösning.

2. $\sin(y) - \dfrac{1}{3}\sin^3(y)$.

3. Matlab funktionsfil:

```
function y=funk(t,u)
y=(cos(t))^3;
```

Matlab kommando:

```
>> [x,U]=my_ode('funk',[0, 5],0,1e-2);  plot(x,U)
```

4.

$$\int_0^t \frac{1}{x-3}\,dx = \Big[\log(|x-3|)\Big]_0^t = \log(|t-3|) - \log(|-3|) = \log\Big(\frac{3-t}{3}\Big), \quad \text{för } t < 3$$

5. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

6. $a = 0,\ b = 0.1,\ i = 1,\ t(1) = 0,\ U(:,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

test: $t(1) = 0 < b = 0.1$ sant

$i = 2,\ t(2) = 0.1,\ U(:,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0 \end{bmatrix}$

test: $t(2) = 0.1 < b = 0.1$ falskt

Nu stoppar loopen och vi har nu: $t = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 1.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Till sist transponeras matriserna: $t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 0 \end{bmatrix}$

Svaret blir $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.1 & 0 \end{bmatrix}$

7. $u(t) = 2e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-s)} 5\,ds = 2e^{-3t} - \frac{5}{3}(e^{-3t} - 1)$

8. $u(t) = 7\cos(5t) + \frac{2}{5}\sin(5t)$

9. $u(t) = \dfrac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-t}}$

10. Icke-linjär: $u' + 3u^2 = 0$. Linjär homogen av första ordningen: $u' + 3u = 0$. Linjär inhomogen av andra ordningen: $u'' + 2u' + u = \sin(t)$.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till radreducerad trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & \mid & -\frac{1}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & \mid & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 + 2x_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Variabeln x_3 är fri: $x_3 = s$. De andra äro bundna: $x_2 = \frac{1}{3} - 2s$, $x_1 = -\frac{1}{3} + s$, så att lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pivotkolonnerna, dvs kolonn nr 1 och 2, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1 och 2 i A en bas för $R(A)$, dvs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(c) För att uttrycka $b = x_1 a_1 + x_2 a_2$ löser vi ekvationssystemet $[a_1 \ a_2]x = b$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Räkningarna i (a) ger genast $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b = x_1 a_1 + x_2 a_2 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = c \det(\hat{A}) = 0$ och att kolonnerna är linjärt beroende. Då är A singulär.

(e) Antag $u, v \in R(A)$ och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är $u = Ax$, $v = Ay$, så att $\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$. Det betyder att $\alpha u + \beta v \in R(A)$. Detta visar att $R(A)$ är ett linjärt rum. Dessutom har vi $Ax \in \mathbf{R}^3$, så att $R(A) \subset \mathbf{R}^3$. Vi har visat att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) Ekvationen är $(D^2 + 2D + 10)u = 0$. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 10 = 0$ med rötterna $r_1 = -1 + 3i$, $r_2 = -1 - 3i$. Lösningen blir

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t}\big(A\cos(3t) + B\sin(3t)\big), \\ u'(t) &= -e^{-t}\big(A\cos(3t) + B\sin(3t)\big) + 3e^{-t}\big(-A\sin(3t) + B\cos(3t)\big). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A, \\ u_1 &= u'(0) = -A + 3B, \end{aligned}$$

dvs $A = u_0$, $B = \frac{1}{3}(u_1 + u_0)$. Således

$$u(t) = e^{-t}\big(u_0\cos(3t) + \tfrac{1}{3}(u_0 + u_1)\sin(3t)\big).$$

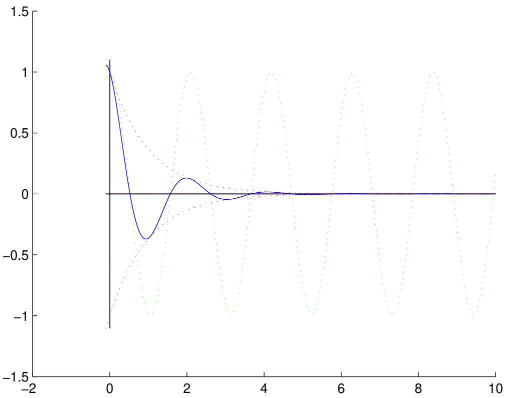
(b) Eftersom $0 \le e^{-t} \le 1$ och $|\cos(3t)| \le 1$, $|\sin(3t)| \le 1$ får vi

$$\begin{aligned} |u(t)| &= e^{-t}\big|u_0\cos(3t) + \tfrac{1}{3}(u_0+u_1)\sin(3t)\big| \\ &\le |u_0||\cos(3t)| + \tfrac{1}{3}(|u_0|+|u_1|)|\sin(3t)| \\ &\le \tfrac{4}{3}|u_0| + \tfrac{1}{3}|u_1|, \quad \text{för } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Alltså

$$\max_{0\le t\le T} |u(t)| \le \tfrac{4}{3}|u_0| + \tfrac{1}{3}|u_1|.$$

(c) Med $u_0 = 1,\ u_1 = -1$ får vi $u(t) = e^{-t}\cos(3t)$. Se Figur 1.



FIGUR 1. $u(t) = e^{-t}\cos(3t)$ tillsammans med $\pm e^{-t}$ och $\cos(3t)$.

(d) Man skriver det som ett system av första ordningen: $v_1 = u$, $v_2 = u'$ och

$$v' = Av,\ v(0) = v_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Sedan skriver man en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
yprime=[0 1; -10 -2]*x;
```

och exekverar MATLAB-kommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],[1;2],.01)
```

där `[0;10]` anger ett tidsintervall och `[1;2]` är begynnelsevärdena och `.01` är steglängden.

13. (a), (b), (c) se boken.

(d) Vi använder högra respektive vänstra rektangelregeln med steget $h = 1$ för att approximera integralen $\log(4) = \int_1^4 x^{-1}\,dx$. Vi får

$$1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \log(4) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2.$$

/stig