ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 2

David Heintz, 25 september 2005

Innehåll

1 Polynom

1.1 Uppgift 10.2

Find the slope-intercept equations of the lines passing through the following pairs of points. Plot the line in each case.

a) $(4, -6)$ and $(14, 2)$

Ekvationen för en linje — ett förstagradspolynom — är

$$y = mx + b, \tag{1}$$

enligt [AMBS, ekv. 10.3] (kallas här *the slope-intercept equation*), där m är linjens lutning och b dess y-koordinat för $x = 0$. Lutningen ges av

$$m = \frac{\text{förändring i } y}{\text{förändring i } x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \tag{2}$$

givet två punkter (x_0, y_0) samt (x_1, y_1) på linjen. Alltså blir

$$m = \frac{2 - (-6)}{14 - 4} = \frac{4}{5},$$

och eftersom (2) även kan skrivas

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \implies y - y_0 = m(x - x_0), \tag{3}$$

för en godtycklig punkt (x, y), erhålles linjens ekvation som

$$y + 6 = \tfrac{4}{5}(x - 4),$$

eller, på samma form som i (1), till

$$y = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{46}{5}.$$

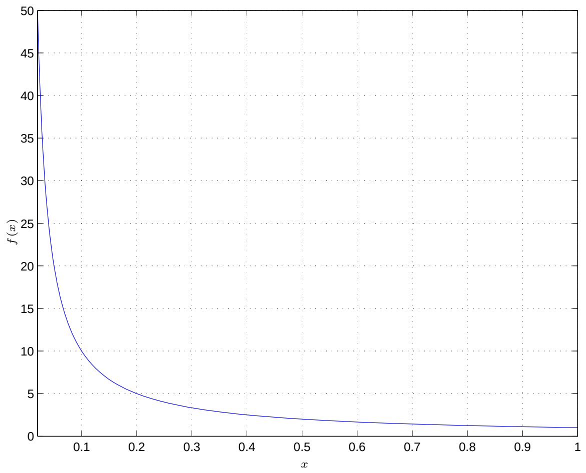
Funktionsgrafen är plottad i Figur 1.

Anmärkning. Formen (3) för linjens ekvation kallas i AMBS *the point-slope equation*. Jämför med uppgift 10.1. □

1.2 Uppgift 10.7

Find the point of intersection between the following pair of lines.

b) $y - 5 = 7(x - 1)$ and $y + 3 = -4(x - 9)$



Figur 1: Funktionen $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{46}{5}$ över intervallet $[-2, 2]$.

Två linjer har, såvida de inte är parallella eller sammanfaller (huruvida man då alls talar om två linjer), en skärningspunkt. Vi hittar den genom att t.ex. utnyttja att y-koordinaten där är densamma, och löser sedan ut x-koordinaten:

$$y - 5 = 7(x - 1) \implies y = 7x - 2, \tag{4}$$
$$y + 3 = -4(x - 9) \implies y = -4x + 33, \tag{5}$$

ty med (4)=(5) ges

$$7x - 2 = -4x + 33 \implies x = \tfrac{35}{11}.$$

Insättning i endera av de givna ekvationerna ger därefter den gemensamma y-koordinaten:

$$y = 7\tfrac{35}{11} - 2 = \tfrac{223}{11},$$

dvs. att den sökta skärningspunkten är $(35/11, 223/11)$.

Anmärkning. Det hade givetvis gått lika bra att i omvänd ordning först låta x-koordinaterna vara lika för att lösa ut y-koordinaten. □

1.3 Uppgift 10.10

Show that $f(x) = x^2$ is decreasing for $x < 0$.

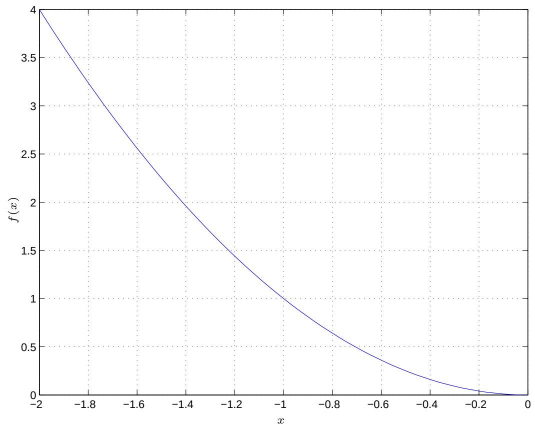
En funktion f kallas *växande* om det för alla x och y i definitionsmängden D_f gäller att

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

eller t.o.m. *strängt växande* såvida

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

Att f är strängt växande medför givetvis att f är växande. På liknande sätt definieras *avtagande* resp. *strängt avtagande* funktion. Sedan brukar man säga att f är *monoton* om funktionen är antingen växande eller avtagande, och motsvarande innebörd ges uttrycket *strängt monoton*.



Figur 2: $f(x) = x^2$ är strängt avtagande.

För att ta reda på huruvida f är (strängt) avtagande, jämför vi differensen mellan två funktionsvärden när $x < y < 0$:

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = \underbrace{(x + y)}_{<0}\underbrace{(x - y)}_{<0} > 0,$$

vilket berättar vad som händer när vi går från x till y, dvs. från vänster till höger på tallinjen. Eftersom differensen blir positiv är $f(x) > f(y)$, och således måste f minska för alla $x < 0$. □

1.4 Uppgift 10.15

Complete the square for the following quadratic functions, and then plot them for $3 \leq x \leq 3$.

a) $x^2 + 4x + 5$

Vi påminner oss om de s.k. *kvadreringsreglerna*:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{6}$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

där $a, b \in \mathbb{R}$. Det givna andragradspolynomet liknar till formen högerledet (HL) i (6); låt oss därför pröva ett kvadratuttryck som ”verkar passa”, i den mening att de två första termerna blir korrekta (sätt $a = x$ och $b = 2$):

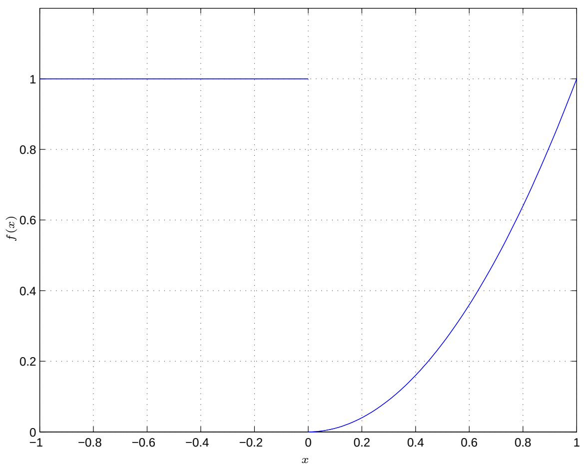
$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

Återstår endast en korrektion (i det här fallet att addera 1 på båda sidor om likheten)

$$(x+2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 5,$$

och vi har lösningen i vänsterledet (VL). Funktionsgrafen återfinns i Figur 3.

Anmärkning. Efter kvadratkomplettering får man t.ex. veta mer om hur ett andragradspolynom beter sig. Med $f(x) = a(x+b)^2 + c$ har f ett extremvärde c, som är ett maximum eller minimum beroende av tecknet hos a. Funktionsgrafen är dessutom translaterad i x-led efter storleken av b (se [AMBS, avs. 10.5]). □



Figur 3: Funktionen $f(x) = (x+2)^2 + 1$ över intervallet $[-3, 3]$.

1.5 Uppgift 10.16

Write the following finite sums using the summation notation. Be sure to get the starting and ending values for the index correct!

b) $s_n = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \cdots \pm \frac{1}{n^2}$

Vi har för varje ny term teckenväxling samt en nämnare som växer kvadratiskt. Efter enklare test fås

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{i^2},$$

vilket verkar korrekt (särskilt för den första resp. sista termen i summan):

$$\begin{aligned} s_n &= (-1)^1 \frac{1}{1^2} + (-1)^2 \frac{1}{2^2} + (-1)^3 \frac{1}{3^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2} \\ &= -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

där $(-1)^n$ kan ersättas av $\pm$ (om man så vill).

Anmärkning. Att byta tecken på s_n kan exempelvis göras genom att låta exponenten för basen -1 vara $i+1$ i stället för i. □

c) $s_n = 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Genom att titta på den sista termen i summan inses att den borde skrivas ungefär

$$\begin{aligned} \tilde{s}_n &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

bortsett från att man missar den första termen. Men ibland — exempelvis här — är det inte möjligt att samla alla termer ”under ett summatecken”. Svaret blir att lägga till det som saknas:

$$s_n = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)},$$

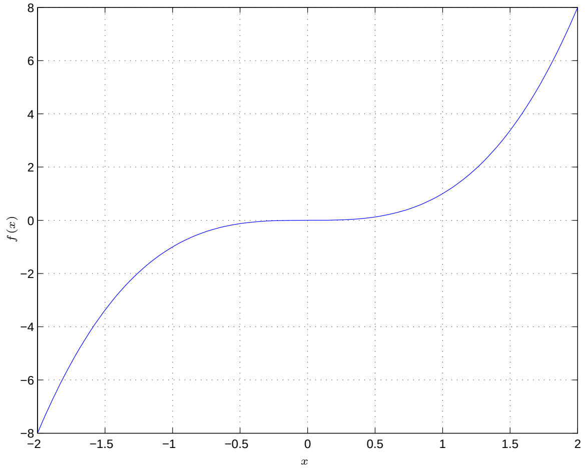
vilket är en lösning av uppgiften (man kan tänka sig andra konstruktioner) . □

1.6 Uppgift 10.22

Show that x^3 is increasing for all x, and that x^4 is decreasing for $x < 0$, but increasing for $x > 0$.

Ett bra sätt att lösa uppgiften på är att jämföra differenser mellan funktionsvärden. Vi bildar därför

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) = x^3 - y^3 &= (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right) \\ &= (x-y)\tfrac{1}{2}\underbrace{\left(x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2\right)}_{>0} < 0, \end{aligned}$$



Figur 4: $f(x) = x^3$ är en strängt växande funktion.

för alla $x < y$. Alltså växer funktionsvärdet vid rörelse från vänster till höger på tallinjen.

Över till $f(x) = x^4$: låt först $x < y < 0$, vilket ger

$$f(x) - f(y) = x^4 - y^4 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 - y^2\right) = \underbrace{\left(x^2 + y^2\right)}_{>0}\underbrace{(x + y)}_{<0}\underbrace{(x - y)}_{<0} > 0,$$

så att $f(x) > f(y)$ och f avtar (precis vad vi skulle visa). Om sedan i stället $0 \leq x < y$ fås omvänt

$$f(x) - f(y) = \underbrace{\left(x^2 + y^2\right)}_{>0}\underbrace{(x + y)}_{>0}\underbrace{(x - y)}_{<0} < 0,$$

vilket innebär att f är växande för positiva x. □

1.7 Uppgift 10.25

Plot the following piecewise polynomials for $-2 \leq x \leq 2$.

a) $$f(x) = \begin{cases} 1, & -2 \leq x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

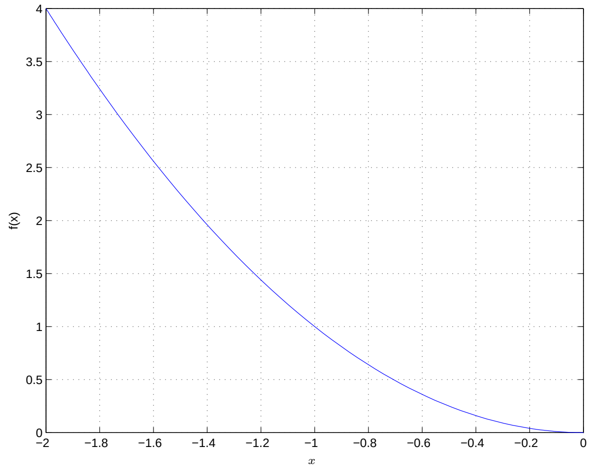
MATLAB är ett utmärkt visualiseringsverktyg. Att plotta Figur 5 är inte svårare än att först definiera det styckvisa polynomet (spara t.ex. funktionsfilen som `piecewise.m`)


```
function y = piecewise(x)

  if x <= -1
    y = 1;
  elseif x <= 1
    y = x^2;
  else
    y = x;
  end
```

för att sedan exekvera (i MATLAB-prompten)

```
fplot('piecewise',[-2 2])
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-2 2 -.5 2.5])
```



Figur 5: Det styckvisa polynomet $f(x)$.

2 Kombinationer av funktioner

2.1 Uppgift 11.4

Use polynomial division for the following rational functions to show that the denominator divides the numerate exactly (or to compute the remainder if not).

b) $\frac{2x^2-7x-4}{2x+1}$

En repetition av *liggande stolen* från uppgift 7.8b) i förra veckan! Den här gången visserligen för polynom, men principen är trots det densamma. Efter räkning fås

$$\frac{2x^2-7x-4}{2x+1} = x-4,$$

vilket kan kontrolleras via multiplikationen $(2x+1)(x-4) = 2x^2-7x-4$.

Anmärkning. Om inte förr, kommer vi att få nytta av polynomdivision i samband med s.k. *partialbråksuppdelning* vid beräkning av vissa integraler i nästa kurs, ALA-b. (Stay tuned . . .)

□

2.2 Uppgift 11.5

Given $f_1(x) = 3x-5$, $f_2(x) = 2x^2+1$, *and* $f_3(x) = \frac{4}{x}$, *write out formulas for the following functions.*

b) $f_2 \circ f_3$

Givet två funktioner f_2 och f_3 kan vi definiera en ny och sammansatt funktion, $f_2 \circ f_3$, genom att låta output från f_3 bli input för f_2:

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_3 &= (f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) \\ &= 2f_3^2(x) + 1 = 2\left(\frac{4}{x}\right)^2 + 1 = \frac{32}{x^2} + 1, \end{aligned}$$

och vi är klara.

Anmärkning. För två funktioner g_1 och g_2 är $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$ i vanliga fall. □

2.3 Uppgift 11.8

For the given functions f_1 *and* f_2 *determine the domain of* $f_2 \circ f_1$.

b) $f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 4$ and $f_2(x) = \frac{x+1}{x}$

Att bestämma definitionsmängden — eller domänen — D_F för en sammansatt funktion $f_2 \circ f_1$ är ibland knepigt. Vi måste se till att båda funktionerna f_1 och f_2 är definierade för ett input om x-värdet ska tillåtas. Här har vi t.ex. att f_1 inte är definierad för $x = 1$, eftersom kvoten i första termen då blir ”oändligt stor” (division med 0 är inte tillåten). Av samma anledning får inte heller $f_1 = 0$, ty vi har på samma sätt en problematisk kvot i f_2:

$$F = f_2 \circ f_1 = \frac{f_1 + 1}{f_1}.$$

Alltså måste f_1:s nollställen uteslutas och vi löser därför

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 4 = 0 \implies x = 1 \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Utöver dessa tre punkter är hela tallinjen tillåten och vi får

$$D_F = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}\right\}.$$

□

3 Lipschitzkontinuitet

3.1 Uppgift 12.3

Show that $f(x) = 4x - 2x^2$ is Lipschitz continuous on $[-2, 2]$ directly and compute a Lipschitz constant.

En viktig egenskap för funktioner är *kontinuitet*. En kontinuerlig funktion f har en graf man typiskt kan plotta utan att behöva lyfta pennan (om vi för en stund tänker oss att MATLAB använder penna — "skissa" eller "rita" är måhända ett bättre ord i sammanhanget). Hur som helst, vi förväntar oss att funktionen inte gör oväntade hopp — om input x ändras, bara lite grann, ska inte heller funktionsvärdet $f(x)$ drastiskt förändras.

I AMBS införs begreppet *Lipschitzkontinuitet* vilket, i någon mening, mäter hur pass kontinuerlig en funktion är: givet en ändring av input uppskattas den maximala förändringen av output (begränsas uppåt i termer av input).

Definition 3.1 (LIPSCHITZKONTINUITET). *En funktion f sägs vara Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstant L_f över intervallet I, om det finns en (icke-negativ) konstant L_f sådan att*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f |x_1 - x_2|, \tag{7}$$

för alla $x_1, x_2 \in I$.

Vi tar ledning av definitionen och bildar differensen

$$f(x_1) - f(x_2) = 4(x_1 - x_2) - 2(x_1^2 - x_2^2) = 4(x_1 - x_2) - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2),$$

där vi utnyttjat *konjugatregeln*: $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$. Vidare fås

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |4(x_1 - x_2) - 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\ &= |4 - 2(x_1 + x_2)||x_1 - x_2| \\ &\leq 12|x_1 - x_2|, \end{aligned} \tag{8}$$

ty det största värdet av $4 - 2(x_1 + x_2)$ på $[-2, 2]$ blir 12 (för $x_1 = x_2 = -2$). Men eftersom (8) satisfierar (7), måste f vara Lipschitzkontinuerlig med just $L_f = 12$.

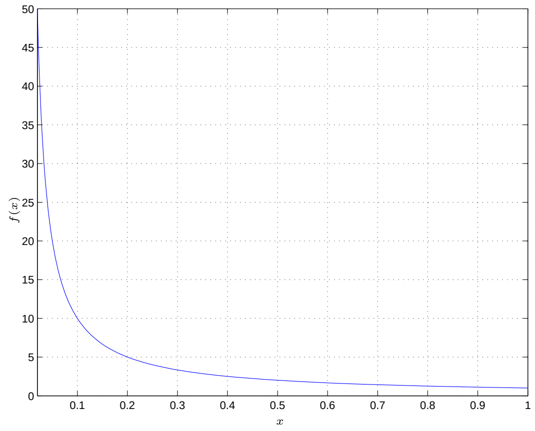
Anmärkning. Ofta när man ska visa någonting, och inte riktigt vet hur, är det bra tips att utgå dess definition, och visa att kraven där är uppfyllda.

Anmärkning. Ibland är det möjligt att finna flera Lipschitzkonstanter — exempelvis är f i uppgiften också Lipschitzkontinuerlig med $L_f = 13$ (med motivationen att $13 > 12$). För det mesta räcker det emellertid att visa att f uppfyller (7). Finns det sedan trick som förfinar olikheten, dvs. minimerar L_f, brukar sådant vara mindre viktigt. (Exemplet med $L_f = 13$ var i det avseendet inte särskilt bra!) $\square$

3.2 Uppgift 12.11

Explain why $f(x) = \frac{1}{x}$ is not Lipschitz continuous on $I = (0, 1]$.

Att en funktion $f(x)$ inte är Lipschitzkontinuerlig innebär i praktiken t.ex. att den "går mot oändligheten", dvs. att funktionsgrafen har mycket brant lutning någonstans på I, alternativt att f gör "oväntade hopp" (mer om det i nästa uppgift!). I Figur 6 ser vi tydligt att f växer



Figur 6: $f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$ när $x \to 0^+$ och är inte Lipschitzkontinuerlig på I.

och inte är begränsad. Det är "självklart". Men hur visar man det strikt? Vi måste använda (7) och visa att olikheten inte gäller.

Låt $x = \frac{1}{N}$ här vara punkten till höger om $y = \frac{1}{2N}$ på tallinjen (notera att $N > 0$). Eftersom $x \neq y$ är det tillåtet att skriva (7) på formen

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \tag{9}$$

och vi finner snabbt att $|f(x) - f(y)| = |N - 2N| = N$, medan $|x - y| = \left|\frac{1}{N} - \frac{1}{2N}\right| = \frac{1}{2N}$, så att

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = 2N^2.$$

Vad har man för nytta av den observationen? Jo, att $2N^2 > L$ för $N > \sqrt{L/2}$, dvs. att oavsett hur stort ett givet L är, blir kvoten av VL i (9) alltid större, bara vi närmar oss origo tillräckligt mycket (ges av valet av N ovan). Det finns inget begränsande L för vilket olikheten gäller!

Därmed har vi visat att f inte är Lipschitzkontinuerlig på I. $\square$

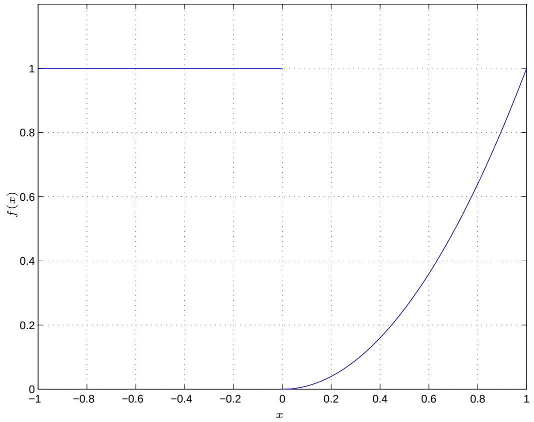
3.3 Uppgift 12.12

Explain why the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

*is **not** Lipschitz continuous on* $I = [-1, 1]$.

Vi har f som en styckvis *diskontinuerlig* funktion, eftersom den gör ett hopp i $x = 0$, vilket ses i Figur 7. För att påvisa detta resonerar vi ungefär som tidigare: låt $x = 0$ vara punkten till



Figur 7: f är inte Lipschitzkontinuerlig.

höger om $y = -\frac{1}{N}$ på tallinjen ($N > 0$). Då $x \neq y$ kan man använda (9), med $|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1$ samt $|x - y| = \left|0 - \left(-\frac{1}{N}\right)\right| = \frac{1}{N}$, så att

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = N,$$

vilket också kan göras större än någon given Lipschitzkonstant om bara $N > L$. Viktigt var att välja y på andra sidan om hoppet i origo. Men svårare än så var det inte! $\square$

3.4 Uppgift 12.18

Use the theorems in this chapter to show that the following functions are Lipschitz continuous on the given intervals, and try to estimate a Lipschitz constant, or prove they are not Lipschitz continuous.

d) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$ on $I = [1, 2]$

Den givna funktionen kan betraktas som en sammansatt funktion $f = f_2 \circ f_1$ med $f_2(x) = x^4$ samt $f_1(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Lyckas man påvisa att såväl f_1 som f_2 är Lipschitzkontinuerliga, med Lipschitzkonstanter L_1 resp. L_2, följer det genom [AMBS, sats 12.6] att f också är det (med $L_f = L_1 L_2$).

Vi testar först f_1:

$$\begin{aligned} |f_1(x_1) - f_1(x_2)| &= \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| = \frac{1}{|x_1 x_2|} |x_1 - x_2| \\ &\leq |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

eftersom $1/|x_1 x_2|$ har största värdet 1 på I (för $x_1 = x_2 = 1$). Alltså är f_1 Lipschitzkontinuerlig med $L_1 = 1$. Vidare, för f_2, fås

$$\begin{aligned} |f_2(x_1) - f_2(x_2)| &= \left|x_1^4 - x_2^4\right| = \left|\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right| \\ &= \left|\left(x_1^2 + x_2^2\right)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)\right| \\ &= \left|\left(x_1^2 + x_2^2\right)(x_1 + x_2)\right| |x_1 - x_2| \\ &\leq 32 |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

där vi använder konjugatregeln (två gånger) samt uppskattningen

$$L_2 = \max_I \left|\left(x_1^2 + x_2^2\right)(x_1 + x_2)\right| = 32,$$

för $x_1 = x_2 = 2$. Det följer från den angivna satsen att även f är Lipschitzkontinuerlig med $L_f = 1 \cdot 32 = 32$. $\square$

4 Följder och gränsvärden

4.1 Uppgift 13.3

Write the following sequences using the index notation.

c) $1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Med indexnotation kan man kompakt skriva en — möjligen oändlig — följd av tal

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \tag{10}$$

på ett sätt liknande summanotation (se uppgift 10.16). Här har vi en återkommande teckenväxling som t.ex. kan skrivas

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\} = \{(-1)^n\}_{n=2}^{\infty},$$

dvs. med $a_n = (-1)^n$ (notera dock att vi — till skillnad från (10) — börjar uppräkningen från $n = 2$). Vi kan enkelt kontrollera genom att lista de första talen i följden. □

4.2 Uppgift 13.4

Show that the following limits hold using the formal definition of the limit.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{7n-1} = \frac{4}{7}$

Användning av den formella definitionen av gränsvärde innbär enligt [AMBS, avs. 13.5] att om gränsvärdet för en följd (givet att den konvergerar) är

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

ska vi för varje (godtyckligt litet) tal $\epsilon > 0$ kunna ge ett naturligt tal N sådant att

$$|a_n - A| \leq \epsilon, \quad n \geq N. \tag{11}$$

Det innebär i ord att bara vi tittar tillräcklig långt bort i följden (åtminstone $n \geq N$ tal bort) så ska differensen mellan talet vi ser och gränsvärdet vara liten (närmare bestämt mindre än ”noggrannheten” ϵ). Förhoppningsvis klarnar det efter ett exempel!

Vi prövar det påstådda gränsvärdet med (11) och får

$$\left|\frac{4n+3}{7n-1} - \frac{4}{7}\right| \leq \epsilon,$$

eller, efter att VL skrivits på minsta gemensamma nämnare (MGN),

$$\frac{25}{7(7n-1)} \leq \epsilon,$$

där absolutbeloppet kan lyftas (VL måste vara positivt). Sedan kan det lösas ut att om

$$n \geq N \geq \frac{1}{7}\left(\frac{25}{7\epsilon} + 1\right),$$

är differensen tillräckligt liten och (11) uppfylld. Pröva! (Märk att ju mindre vi väljer ϵ desto större blir n.) Oavsett hur litet ϵ är kan vi alltid ge ett N som satisfierar kraven. Vi säger att följden

$$\left\{\frac{4n+3}{7n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ har gränsvärdet } \frac{4}{7}.$$

Exempel. Väljs noggranheten $\epsilon = 0.1$ fås, efter lite beräkningar, att $n \geq 6$. Tittar vi på det sjätte talet i följden

$$\left\{\frac{4n+3}{7n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{7}{6}, \frac{11}{13}, \frac{15}{20}, \frac{19}{27}, \frac{23}{34}, \frac{27}{41}, \dots\right\},$$

och jämför mot det påstådda gränsvärdet $A = 4/7$ ges

$$\frac{27}{41} - \frac{4}{7} = 0.0871 < 0.1.$$

Med exempelvis $\epsilon = 0.01$ blir i stället $n = 52$. □

4.3 Uppgift 13.7

Show the following limits to hold using the formal definition for divergence to infinity.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} -4n + 1 = -\infty$

En divergent följd saknar gränsvärde, och en sådan som divergerar mot $\pm\infty$, är en följd som kan visas inte vara *begränsad*. På liknande sätt för funktioner är f *uppåt begränsad* om det finns ett tal B så att

$$f(x) \leq B, \quad \forall x \in D_f,$$

och på motsvarande vis definieras en *nedåt begränsad* funktion. Slutligen blir f begränsad om den är såväl uppåt som nedåt begränsad.

Vi prövar att införa ett tal $B > 0$, så att $-B$ blir det nedåt begränsande talet — om något sådant alls existerar — för följden $\{-4n + 1\}$. Men vi kan visa att

$$-4N + 1 < -B \implies N > \frac{B+1}{4},$$

dvs. att givet B kan man alltid hitta ett ännu större negativt tal i följden, genom att titta åtminstone $n > N$ tal bort. Därmed finns heller ingen nedåt begränsning! Slutsatsen blir att $\{-4n + 1\}$ är divergent mot $-\infty$. □

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 + n^2 = \infty$

Återigen blir idén att påvisa frånvaron av en (uppåt) begränsning B. Man vill ha det till att

$$N^3 + N^2 > B, \tag{12}$$

men eftersom vi har ett polynom — och inte ett monom som i förra deluppgiften — är det lite svårare. Men med $N^3 + N^2 > N^3$, räcker det att visa (12) för N^3, och i så fall blir $N > B^{1/3}$. Väljs bara $n > N$ räcker inget givet B till. Med andra ord är $\{n^3 + n^2\}$ divergent mot ∞. □

4.4 Uppgift 13.8

Show that $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ *for any* $r > 1$.

Givet $B > 0$ har vi att

$$r^n > B \implies N\log(r) > \log(B) \implies N > \frac{\log(B)}{\log(r)},$$

dvs. att med N enligt ovan är talen i följden $\{r^n\}$ alltid större än ett givet B från den N:te platsen och framåt. Därmed är följden divergent mot ∞ (ty B kan vara godtyckligt stor). □

4.5 Uppgift 13.9

Find the values.

a) $1 - .5 + .25 - .125 + \cdots$

Den givna summan överensstämmer med en geometrisk summa (se [Räkneövning — vecka 1, uppg. 7.10]) där

$$s_n = 1 - .5 + .25 - .125 + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

dvs. med första termen $a = 1$ och kvoten $x = -\frac{1}{2}$. Vi påminner oss om formeln för värdet av en geometrisk summa

$$s_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x},$$

och konstaterar gränsvärde saknas när $n \to \infty$ för $|x| \le 1$ (i sådana fall heter det att summan divergerar).

Anmärkning. Även den teckenväxlande följden

$$\{1, -1, 1, -1, 1, \cdots\},$$

är divergent. (Det är inte nödvändigtvis så att en divergent följd $\{x_i\} \to \pm\infty$, utan vad vi vet är att den saknar gränsvärde.)

Om däremot $|x| < 1$ kommer termen $-x^n$ att försvinna med n så att

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-x}. \tag{13}$$

Alltså blir, efter insättning, vårt svar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

□

b) $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \cdots$

Även här, efter faktorisering, har vi en geometrisk summa (med $a = 1$ och $x = \frac{1}{4}$)

$$s_n = 3 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{16} + \cdots = 3\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}.$$

Eftersom $|x| = \frac{1}{4} < 1$ får vi via (13) att

$$3\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 4.$$

□

c) $5^{-2} + 5^{-3} + 5^{-4} + \cdots$

Ånyo en geometrisk summa. Den här gången med $a = \frac{1}{25}$ och $x = \frac{1}{5}$. Vi får

$$s_n = 5^{-2} + 5^{-3} + 5^{-4} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{25 \cdot 5^k},$$

och med $|x| = \frac{1}{5} < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{25\left(1-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{20},$$

efter insättning i (13). □

4.6 Uppgift 13.16

Compute the limits of the sequences $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *with the indicated terms (or show their divergence).*

b) $a_n = 4n^2 - 6n$

Det är ofta arbetsamt att slaviskt använda sig av definitionen vid beräkning av gränsvärden. Man gör bäst i att följa genvägar varhelst de dyker upp. Här kan vi t.ex. faktorisera det givna uttrycket

$$4n^2 - 6n = 2n(2n-3),$$

och det blir tydligt att båda (positiva) faktorerna växer för $n > 1$. Men eftersom följden växer ohejdbart, saknas egentligt gränsvärde, och vi säger att den är *divergent* mot ∞.

Anmärkning. Ett annat sätt att resonera på — när vi exempelvis som här har termer med olika tecken — är att en kvadratisk funktion växer snabbare än en linjär, så att den positiva termen, $4n^2$, överväger den negativa, $-6n$. □

d) $a_n = \frac{2n^2+9n+3}{6n^2+2}$

Ett annat vanligt trick, ofta användbart i samband med gränsvärden av kvoter, är att förkorta uttrycket med nämnarens dominerande term. Här kan man t.o.m. enklare använda n^2 och få gränsvärdet (notera att tre termer försvinner med växande n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+9n+3}{6n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+9/n+3/n^2}{6+2/n} = \frac{1}{3}.$$