ALA-a 2005

RÄKNEÖVNING — VECKA 1

David Heintz, 25 september 2005

Innehåll

1 Naturliga tal och heltal **3**

1.1 Uppgift 5.12 3

1.2 Uppgift 5.15 4

1.3 Uppgift 5.16 4

2 Rationella tal **6**

2.1 Uppgift 7.8 6

2.2 Uppgift 7.10 6

3 Vad är en funktion? **8**

3.1 Uppgift 9.2 8

1 Naturliga tal och heltal

1.1 Uppgift 5.12

Factor the following integers into a product of prime numbers.

a) 60

Man skulle kunna säga att naturliga tal är mer eller mindre delbara, varför det är på sin plats med en definition.

Definition 1.1 (PRIMTAL). *Låt $p > 1, p \in \mathbb{N}$. Nu sägs p vara ett primtal såvida det saknar andra positiva delare än 1 och p. Annars är p sammansatt (byggs upp av primtalsfaktorer).*

Exempel. De första primtalen är $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$, medan det hittills största kända primtalet är $2^{25904951} - 1$. Euklides visade att det finns oändligt många primtal (kraftfulla datorer hittar med tiden nya och större).

Här får vi

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$\square$

b) 96

Efter faktorisering ges

$$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2^2 \cdot 2 \cdot 12 = 2^3 \cdot 2 \cdot 6 = 2^4 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3.$$

$\square$

c) 112

Vi får

$$112 = 2 \cdot 56 = 2 \cdot 2 \cdot 28 = 2^2 \cdot 2 \cdot 14 = 2^3 \cdot 2 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7.$$

$\square$

d) 129

Tal vars siffersumma är delbar med 3 är själva delbara med 3 ($1 + 2 + 9 = 12$, $\frac{12}{3} = 4$):

$$129 = 3 \cdot 43.$$

En bra primtalsverktyg i MATLAB är den inbyggda funktionen `factor`. Skriv `help factor` i MATLAB-prompten för att få veta mer. $\square$

1.2 Uppgift 5.15

Solve the inequalities.

b) $|14 - x| < 6$

Vi börjar med en definition.

Definition 1.2 (ABSOLUTBELOPP). *Absolutbeloppet $|x|$ av ett reellt tal x är*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0, \\ -x, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Anmärkning. Absolutbeloppet $|\cdot|$ är en funktion som endast antar värden större än eller lika med noll. På tallinjen betyder $|x|$ avståndet från punkten x till origo. Mer allmänt tolkas $|x - y|$ som avståndet mellan punkterna x och y.

Definition 1.2 medför att vi delar in och löser uppgiften i två fall:

$$\text{(i)} \quad 14 - x > 0, \qquad \text{(ii)} \quad 14 - x < 0.$$

I det första fallet antas vänsterledet (VL) vara positivt så att

$$|14 - x| < 6 \iff 14 - x < 6 \implies x > 8. \tag{1}$$

När VL i stället är negativt fås

$$|14 - x| < 6 \iff x - 14 < 6 \implies x < 20, \tag{2}$$

eftersom VL då — p.g.a. absolutbeloppet — byter tecken. Kombinerar vi (1) och (2) blir svaret $8 < x < 20$. $\square$

1.3 Uppgift 5.16

Verify that the following is true for arbitrary integers a, b and c.

d) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Man kan visa olikheten genom att först konstatera att $a \leq |a|$ och $b \leq |b|$. Därmed måste även

$$a + b \leq |a| + |b|. \tag{3}$$

Sedan är givetvis $-a \leq |a|$ samt $-b \leq |b|$, så att

$$-a - b = -(a + b) \leq |a| + |b|. \tag{4}$$

Men ett av talen $a + b$ eller $-(a + b)$, dvs. VL i antingen (3) eller (4), är lika med $|a + b|$ (enligt Definition 1.2)! Alltså gäller $|a + b| \leq |a| + |b|$ och beviset är klart.

Anmärkning. Olikheten $|a+b| \leq |a|+|b|$ är mycket känd och kallas för *triangelolikheten* (TO). $\square$

h) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

Vi tar till ett trick och skriver
$$a = a - b + b,$$
och utnyttjar sedan triangelolikheten
$$|a| = |(a-b)+b| \overset{\text{TO}}{\leq} |a-b|+|b| \implies |a|-|b| \leq |a-b|. \tag{5}$$
På samma sätt fås att $b = b - a + a$ och det följer
$$|b| = |(b-a)+a| \overset{\text{TO}}{\leq} |b-a|+|a| \overset{*}{=} |a-b|+|a| \implies -(|a|-|b|) \leq |a-b|. \tag{6}$$
Med andra ord kan vi nu — genom samma argumentation som i d) — säga att olikheten $||a|-|b|| \leq |a-b|$ gäller, ty endera av VL i (5) eller (6) är lika med $||a|-|b||$.

Notera att $(*)$ följer av $|b-a| = |(-1)(a-b)| = \underbrace{|-1|}_{=1}|a-b| = |a-b|$ [se även deluppgift c)].

Anmärkning. Olikheten $||a|-|b|| \leq |a-b|$ brukar kallas för *omvända triangelolikheten.* $\square$

2 Rationella tal

2.1 Uppgift 7.8

Compute the decimal expansions.

b) 2/13

Detta görs via ett lämpligt räkneschema för divison, t.ex. *liggande stolen*. Svaret borde bli
$$\frac{2}{13} = 0.153846153846\ldots,$$
där vi särskilt noterar att decimalutvecklingen är periodisk. Enligt [AMBS, sats 7.1] är varje decimalexpansion av ett rationellt tal periodisk, och tvärtom, varje periodisk decimalutveckling motsvaras av ett rationellt tal. $\square$

2.2 Uppgift 7.10

Find rational numbers corresponding to the decimal expansions.

b) 0.881188118811...

Vi inleder med att betrakta en summa s_n av formen
$$s_n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ax^k, \quad \forall a, x \in \mathbb{R}.$$
En sådan summa, där kvoten x mellan två på varandra följande tal alltid är densamma, kallas *geometrisk summa*. Enkel räkning ger
$$\begin{aligned}(1-x)s_n &= (1-x)(a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1}) \\ &= (a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{n-1}) - (ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^n) \\ &= a - ax^n,\end{aligned}$$
eftersom varje term i högerledet (HL), förutom den första och den sista, tar ut varandra i en s.k. *teleskopsumma*. Givet $x \neq 1$ (om $x = 1$ blir givetvis $s_n = an$) följer via division en bekväm lösningsformel
$$s_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x} = \frac{(\text{första termen})(1 - \text{kvoten}^{\text{antalet termer}})}{1 - \text{kvoten}}.$$
Med $a = 1$ fås särskilt
$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x}. \tag{7}$$
Notera att den givna decimalutvecklingen kan skrivas som en summa av rationella tal
$$0.881188118811\ldots = \frac{8811}{10^4} + \frac{8811}{10^8} + \frac{8811}{10^{12}} + \cdots + \frac{8811}{10^{4m}}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

(den första termen i HL motsvarar de första fyra decimalerna i utvecklingen, den andra de fyra nästkommande, osv.) eller, efter faktorisering,

$$0.881188118811\ldots = \frac{8811}{10^4}\underbrace{\left(1+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\cdots+\frac{8811}{10^{4(m-1)}}\right)}_{=s_m}. \tag{8}$$

Genom (7) identifierar vi summan — en geometrisk sådan med $a = 1$ och $x = 10^{-4}$ — till att vara

$$s_m = \frac{1-10^{-4m}}{1-10^{-4}} = \frac{10^4}{9999}(1-10^{-4m}). \tag{9}$$

Med (9) insatt i (8) fås

$$0.881188118811\ldots = \frac{8811}{9999}(1-10^{-4m}) = \frac{89}{101}(1-10^{-4m})$$

efter förkortning av bråket (med en faktor 99). Alltså måste

$$0.881188118811\ldots - \frac{89}{101} = -\frac{89}{101\cdot 10^{4m}},$$

dvs. att ju längre vi fortsätter decimalexpansionen, vilket är detsamma som att göra m större och större, desto mindre blir differensen mellan termerna i VL (ty kvoten i HL går samtidigt mot noll). Matematiskt skriver vi detta

$$\lim_{m\to\infty}\left|0.8811\ldots 8811_m - \frac{89}{101}\right| = 0,$$

där notationen $0.8811\ldots 8811_m$ motsvarar en trunkering av expansionen efter m decimaler (mer om s.k. gränsvärden kommer senare i kursen!) Det sökta rationella talet är med andra ord 89/101. □

3 Vad är en funktion?

3.1 Uppgift 9.2

For the function $f(x) = 4x - 2$ determine the range R_f given the domain D_f.

a) $D_f = (-2, 4]$

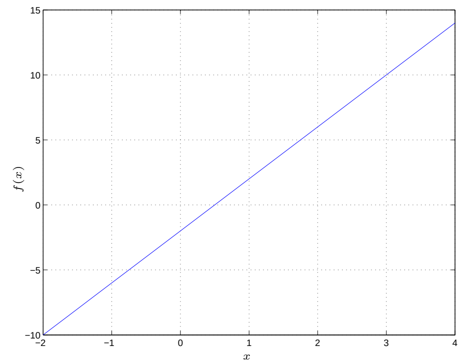
Eftersom f är en linjär funktion, vilket, om inte annat, inses av Figur 1, kommer dess minsta resp. största värde ligga i definitionsmängdens ändpunkter, dvs. -2 och 4. Insättning ger att $f(-2) = 4(-2)-2 = -10$ samt $f(4) = 4\cdot 4-2 = 14$, så att värdemängden blir $R_f = (-10, 14]$.

Anmärkning. Möjligen borde vi bättre argumentera att f är en Lipschitzkontinuerlig funktion utan inre extrempunkter. Mer om det senare i kursen!

Anmärkning. Ett intervall I, med ändpunkter a och b, beskrivs som *öppet*, *halvöppet* eller *slutet*, beroende på om båda, den ena eller ingen av ändpunkterna tillhör intervallet. Vanliga beteckningar är

- $I = [a, b]$: alla reella tal x med $a \le x \le b$ (ÖPPET);
- $I = (a, b]$: alla reella tal x med $a < x \le b$ (HALVÖPPET);
- $I = [a, b)$: alla reella tal x med $a \le x < b$ (HALVÖPPET);
- $I = (a, b)$: alla reella tal x med $a < x < b$ (SLUTET).

I uppgiften var såväl D_f som R_f halvöppna intervall (eller halvöppna mängder).



Figur 1: $f(x) = 4x - 2$ är en linjär funktion.

□