TMA196 Analys och linjär algebra K/Kb/Kf, del a, 2002-01-17

===

Uppgift 1

a) Se bok.
b) Nej. Ej kontinuerlig i $x = 0$, ty för varje given konstant $L > 0$ gäller för $x_1 = 0$ och $x_2 = 1/L$ att

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 2 - 40(-.1x_2/60 - .9(x_2/60)^2) \geq 2 > 1 = L|x_1 - x_2|.$$

Uppgift 2

a) Punkten ifråga har uppenbarligen $y = 2+20 = 22$. Motsvarande x-koordinat ges av sambandet $y = 22 = 2 + x^2/(15-x)$, dvs $x^2 = 20(15-x)$, dvs $x^2 + 20x - 300 = 0$ med lösning $x = -10 - \sqrt{(-10)^2 + 300} = -30$, eftersom $x < 0$.
b) Ekvationen för v reduceras till $v^2 = 40g = 40 \cdot 9.81$. För beskrivning av bisektion, se bok.
c) Ekvationen för v med $g = 10$ reduceras till $v^2 = 400$ med lösning $v = 20$.
d) Hopparens höjd ges av $y = h(x)$ och av $y = 2 - 8t^2/2$ där $x = 20t$, dvs $h(x) = 2 - 4(x/20)^2$. För $x > 60$ ges backens höjd av $f(x) = -80 + 40(x-120)^2/60^2$. Vid nedslaget gäller $h(x) = f(x)$ vilket ger en ekvation för x, som sedan ger $t = x/20$. (Ekvationen $h(x) = f(x)$ är en andragradsekvation som om man löser den ger $x \approx 80$ och $t \approx 4$.)

Uppgift 3

a) Derivering av $h(x) = 2 - 4(x/20)^2$ ger $h'(x) = 0 - 4 \cdot 2(x/20) \cdot \frac{1}{20}$, dvs $h'(80) = -8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{20} = -16/10$.
b) Derivering av $f(x) = -80 + 40(x-120)^2/60^2$ ger $f'(x) = 80(x-120)/60^2$, dvs $f'(80) = 80 \cdot (-40)/60^2 = -8/9$.
c) Tangetvektor till hoppbanan är $a = (1, h'(80)) = (1, -16/10)$ och till backen $b = (1, f'(80)) = (1, -8/9)$ med skalärprodukt $a \cdot b = 1 \cdot 1 + (-16/10)(-8/9) = 1 + 64/45 = 109/45$. Men skalärprodukten är ju också produkten av vektorernas längder,

$$\sqrt{1 + (-16/10)^2} = \sqrt{353/100} \qquad \text{och} \qquad \sqrt{1 + (-8/9)^2} = \sqrt{145/81},$$

och $\cos(\alpha)$, där α är den sökta vinkeln, dvs $\cos(\alpha) = \frac{109/45}{\sqrt{353/100}\sqrt{145/81}} \approx 0.9636$, dvs ett cos-värde ganska nära 1 vilket antyder en ganska liten vinkel α.

Uppgift 4

a) Ansätter $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Villkoren $p(0) = 0$ och $p'(0) = 0$ ger $a = 0$ och $b = 0$, dvs $p(x) = cx^2 + dx^3$. Villkoren $p(120) = -80$ och $p'(120) = 0$ ger $120^2 c + 120^3 d = -80$ och $2 \cdot 120c + 3 \cdot 120^2 d = 0$, dvs $2c + 240d = -1/4$ och $2c + 360d = 0$, dvs $120d = 1/4$, dvs $d = 1/480$ och $c = -180d = -3/8$.
b) Derivering av $p(x) = -3/8x^2 + 1/480x^3$ ger $p'(x) = -3/4x + 1/160x^2$ och $p''(x) = -3/4 + 1/80x$ som är < 0 för $x < 60$ och > 0 för $x > 60$, dvs backens lutning $p'(x)$ har sitt största (negativa) värde för $x = 60$. Detta kan man också

misstänka av symmtriskäl eftersom $p(x)$ har max för $x = 0$ och min för $x = 120$.
c) Eftersom $y \to a$ då $x \to \infty$ blir totala fallhöjden a, dvs vi måste sätta $a = 120$. För att erhålla $y = -40$ för $x = 60$, dvs $-120 \cdot 60^2/(b + 60^2) = -40$ sätter vi förstås $b + 60^2 = 3 \cdot 60^2$, dvs $b = 2 \cdot 60^2 = 7200$.

Uppgift 5

a) En fixpunkt för en funktion $g(x)$ är en punkt x sådan att $g(x) = x$.
b) Fixpunktsiteration utgår från lämpligt x_0 och sedan beräknas succesivt $x_{j+1} = g(x_j)$ för $j = 0, 1, 2, ...$
c) Iterationen ger en konvergent följd om $g(x)$ Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstant $L < 1$ (på aktuellt intervall).
d) Se bok.