Tentamen i Matematisk analys i en variabel Kf & Kb, del A, 1999-10-18.

Telefonjour/rond: Johan Hoffman, ankn. 5368

Tillåtna hjälpmedel: Inga!

Resultat meddelas senast 991021 på kurshemsidan resp i MC.

==

Uppgift 1.

Sätt $f(x) = 1/\sqrt{x}$ och $g(x) = 4 - x^2$. Bestäm funktionerna (a) $(\,f\,g\,)(x)$ (b) $(f \circ g)(x)$ (c) $f^{-1}(x)$, samt ange deras naturliga definitionsmängder.

Uppgift 2.

(a) Visa att $f(x) = x^2$ är Lipschitz kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$.

(b) Undersök huruvida $f(x) = 1/x$ är Lipschitz kontinuerlig på intervallet $(0, 1]$.

Uppgift 3.

(a) Talet $2^{1/3}$ betecknar lösningen till en viss definierande ekvation. Vilken?

(b) Vilken sats garanterar att en sådan lösning finns, vilka är förutsättningarna i satsen, och hur kan man se att dessa är uppfyllda/satsen är tillämpbar i det aktuella fallet?

(c) Är lösningen entydigt bestämd? Motivera.

Uppgift 4.

(a) Vad menas med att $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en *kontraktion*?

(b) Visa att följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ definierad av $x_{j+1} = g(x_j)$, med x_0 givet och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en kontraktion, är en Cauchyföljd.

(c) För g och $\{x_j\}$ som i (b), visa att $\bar{x} = g(\bar{x})$, där $\bar{x} = \lim_{j\to\infty} x_j$.

(d) Visa att $g(x) = \frac{1}{2+x}$ är en kontraktion på intervallet $[0, \infty)$.

Uppgift 5.

(a) Vad menas med att $f(x)$ är *differentierbar* i punkten $\bar{x}$, och hur definieras derivatan $f'(\bar{x})$?

(b) Härled deriveringsregeln för produkten av funktionerna $f(x)$ och $g(x)$.

(c) Formulera l'Hospitals regel.