Lösningar till
Frivillig dugga i ALA-C, K/Kf/Bt-1, VT-03

1 a) Vi har att f är en skalär funktion, dvs $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, så divergensen är inte definierad. Vi får:

- gradienten: $\nabla f(x_1,x_2) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) = (x_2 + \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}, x_1 + \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2})$
- rotationen: $\nabla \times f(x_1,x_2) = (\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial f}{\partial x_1}) = (x_1 + \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}, -x_2 - \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2})$
- laplace: $\Delta f(x_1,x_2) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}) = \frac{4}{x_1^2+x_2^2} - \frac{4(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0$

1 b) Vi har att f är en vektorvärd funktion, dvs $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, så gradienten och laplacen är inte definierade. Vi får:

- divergensen: $\nabla \cdot f(x_1,x_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2x_1x_2 - \frac{2x_2}{x_1^2-x_2^2}$
- rotationen: $\nabla \times f(x_1,x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{2x_1}{x_1^2-x_2^2} - x_1^2$

2. Vi har

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

och får då

$$\nabla \times \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Se Exempel 95.2 i Egenvärdesproblemet

4. Variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

ger

$$|\det \frac{d(x,y)}{d(u,v)}| = |\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}| = 1/2.$$

Med D enligt uppgiften fås att $u \in [-1,1]$ och $v \in [-1,1]$ så integralen blir

$$\iint_D (x^2-y^2)^{10} dxdy = \iint_D (x+y)^{10}(x-y)^{10} dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^{10}v^{10} dudv =$$
$$= \frac{1}{2}[\frac{u^{11}}{11}]_{-1}^{1}[\frac{v^{11}}{11}]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\frac{2}{11}\frac{2}{11} = \frac{2}{121}.$$

5. Måste visa att punkten är en stationär punkt (dvs $\nabla f = 0$) och att Hessianen H är positivt definit (dvs alla egenvärden $\lambda_i > 0$) i punkten.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2^2 - 3x_3 \\ -3x_2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,1,1,) = (0,0,0)$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 & -3 \\ 0 & -3 & 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(H(0,1,1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(6-\lambda)^2 - 9(2-\lambda) = (2-\lambda)((6-\lambda)^2 - 9)$$

Vi får egenvärden $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 9$, alla större än 0. Alltså är det en min-punkt.

6. Vi kan parametrisera Γ mha

$$s(t) = (1,2) + t((3,4) - (1,2)) = (1+2t, 2+2t), \qquad t \in [0,1],$$

med $s'(t) = (2,2)$. Integralen blir då

$$\int_\Gamma f \cdot ds = \int_0^1 (2+2t, 1+2t) \cdot (2,2) dt = \int_0^1 6 + 8t dt = 6 + 4 = 10.$$