Frivillig dugga i ALA-C, K/Kf/Bt-1, VT-03

1. Beräkna, i de fall det är möjligt, gradient, divergens, rotation och laplace av

   a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \ln(x_1^2 + x_2^2)$

   b) $f(x_1, x_2) = (x_1^2 x_2, \ln(x_1^2 - x_2^2))$

2. Visa, genom direkta räkningar, att $\nabla \times \nabla u = 0$, där $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

3. Efter linjärisering har vi fått följande dynamiska system:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t), \\ u_2'(t) &= -4u_1(t). \end{aligned}$$

Är systemet stabilt?

4. Beräkna

$$\int\int_D (x^2 - y^2)^{10} dxdy,$$

där D ges av $|x| + |y| \leq 1$, genom att införa nya variabler $u = x + y$ och $v = x - y$.

5. Visa att funktionen

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 - 3x_2x_3 + x_3^3,$$

har ett minimum i punkten $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 1)$.

6. Ett fält ges av $f(x, y) = (y, x)$. Beräkna

$$\int_\Gamma f \cdot ds,$$

då Γ är den räta linjen från $(1, 2)$ till $(3, 4)$.