Linjär algebra – övningar

Fredrik Bengzon

Modifierat av Stig Larsson, 2004–01–30

A. Ortogonalprojektion

Problem 1 *Låt* $x = [1, -1, 0, 2]^T$ *och* $y = [3, -1, 1, 1]^T$.

a. Beräkna $x \cdot y$.

b. Bestäm vinkeln mellan vektorerna x *och* y.

c. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $x - y$ *och* $x + y$.

Problem 2 *Låt* $e = [2, 1, 2, 1]^T$ *och* $w = [1, 2, -3, 4]^T$. *Bestäm talet* s *så att vektorn* $se + w$ *blir ortogonal mot* e.

Problem 3 *Ortogonalisera följande vektorer med Gram-Schmidts metod.*

$$v_1 = [1, 2, 3]^T, \qquad v_2 = [3, 2, 1]^T.$$

Problem 4 *Låt* $e_1 = [2, 1, 0, 1]^T$, $e_2 = [0, 2, 1, -2]^T$ *och* $w = [1, 2, 1, 2]^T$. *Visa, att* e_1 *och* e_2 *är ortogonala och bestäm sedan talen* s_1 *och* s_2, *så att vektorn* $s_1 e_1 + s_2 e_2 + w$ *blir ortogonal mot både* e_1 *och* e_2.

Problem 5 *Låt* V *vara ett underrum till* $\mathbb{R}^m$ *med dimensionen* $n < m$ *och låt* V *spännas av kolonnerna i matrisen* $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Projektionsmatrisen* P *för ortogonal projektion på* V *ges av*

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T.$$

Visa, att $P = QQ^T$ *om kolonnerna i* Q *är ortonormala. Avancerat: bevisa formeln för* P.

Problem 6 *Låt*

$$u = [1, 1, 1, 1]^T, \quad v = [1, -1, 1, -1]^T.$$

och låt $V = S(u, v)$ *vara vektorrummet som spänns upp av* u *och* v.

a. Verifiera att u *och* v *är ortogonala.*

b. Normalisera u *och* v *till längden* 1. *Dessa bildar en ON-bas för* V.

c. Bilda (4×2) *matrisen* Q *med vektorerna i ON-basen som kolonner. Beräkna* $Q^T Q$. *Beräkna projektionsmatrisen* $P = QQ^T$ *för ortogonal projektion på* V.

d. Bestäm ortogonalprojektionen Pw *av vektorn* $w = [1, 2, 3, 4]^T$ *på* V. *Beräkna* $(w - Pw) \cdot u$.

Problem 7 *Ange ortogonalprojektionen av* $u = [0, 4, 4, 0]^T$ *på det underrum till* $\mathbb{R}^4$, *som genereras av vektorerna*

$$e_1 = [1, 2, 3, 1]^T, \quad e_2 = [1, -2, 1, 0]^T.$$

B. Egenvärden

Problem 8 *Visa, att* $x = [1, 0]^T$ *är en egenvektor till*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vilket egenvärde är associerat med denna egenvektor?

Problem 9 *Bestäm egenvärdena till matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Problem 10 *Bestäm egenvärdena till matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problem 11 *Bestäm egenvärden och egenvektorer till*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Problem 12 *Givet matriserna*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Visa, att multiplikationen $P^T AP$ *ger en diagonal matris* D.

Problem 13 *Beräkna egenvärden* λ *och normaliserade egenvektorer* x *till*

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Problem 14 *Visa, att om* λ *är ett egenvärde till* A, *så är* $1/\lambda$ *ett egenvärde till* A^{-1}.

Svar 1

a. 6

b. $\pi/4$

c. $\arccos(-1/\sqrt{5})$

Svar 2 $s = -1/5$

Svar 3 $u_1 = v_1/\|v_1\| = [1,2,3]^T/\sqrt{14}$, $u_2 = [4,1,-2]^T/\sqrt{21}$.

Svar 4 $s_1 = -1$, $s_2 = -1/9$

Svar 5 Q:s kolonner är ortonormala dvs. $Q^TQ = I$. Projektionen blir

$$P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QI^{-1}Q^T = QQ^T.$$

Observera att $QQ^T \neq I$ eftersom Q är av typ $(m \times n)$.

Svar 6

a. -

b. -

c.

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

d. $Pw = [2,3,2,3]^T$

Svar 7 $\frac{2}{3}[1,6,5,2]^T$

Svar 8 $\lambda = 2$

Svar 9 Matrisen A är triangulär, då är även $A - \lambda I$ triangulär, $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(6-\lambda)(9-\lambda)(6-\lambda)(4-\lambda)$, egenvärdena är lika med diagonalelementen: 1, 6, 9, 6 och 4.

Svar 10 -1, 7 och 1.

Svar 11 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ och t.ex. $x_1 = [1,-1]^T$, $x_2 = [0,1]^T$,

Svar 12 $D = \text{diag}(-1,3)$. Kolonnerna i P är egenvektorerna till A.

Svar 13 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 8$ och $x_1 = [-1,1]^T/\sqrt{2}$, $x_2 = [1,1]^T/\sqrt{2}$.

Svar 14 -