Inledande övningar - svar/tips

1. Kolla att $\int_{\partial\Omega} u \cdot n = 2 = \int_\Omega \mathrm{div} u$. Svar: $\phi = -x^2/2 - y^2/2$ (+C, godt. konstant). $||\phi|| = \sqrt{7/45}$. $||\nabla\phi|| = ||u|| = \sqrt{2/3}$.

2. Multiplicera ekv med $-\Delta u$ och integrera över Ω. Använd Greens formel. Utnyttja att $v\dot{v} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}v^2$.

3. I andra delen: Utnyttja att $\dot{u} = \Delta u$ och applicera Cauchys olikhet på integralen $\int_\epsilon^t ||\Delta u||\, ds = \int_\epsilon^t \frac{1}{\sqrt{s}}(\sqrt{s}||\Delta u||)\, ds$.

4. Multiplicera ekv med u och integrera över Ω. Utnyttja Greens formel och Cauchys olikhet. Uppskatta först $||u||$ och sedan $||\nabla u||$.

5. Multiplicera ekv med $\Delta\dot{u}$ och integrera över Ω.

6. Multiplicera ekv med u och integrera över Ω. Använd Greens formel och byt ut $\frac{\partial u}{\partial n}$ i randintegralen mot $-u$. Den konserverade energin blir $||\dot{u}||^2 + ||\nabla u||^2 + ||u||^2_{\partial\Omega}$.

7. Betrakta $\int_\Omega u^2 = \int_\Omega u^2\Delta\phi$ med $\phi = x^2/2$ eller bättre med $\phi = x^2/4 + y^2/4$ eller ännu bättre med $\phi = (x - .5)^2/4 + (y - .5)^2/4$. Se beviset i föreläsningsanteckningarna!

8. Beakta att $w = u_1 - u_2$ satisfierar $-\Delta w = g = f_1 - f_2$. Har på föreläsning visats, med hjälp av olikheten i uppgift 7, att $||\nabla w|| \leq C_\Omega ||g||$. Utnyttja denna olikhet en gång till och resultatet följer. Svar: Nej, nej.

9. T.ex. kan vi längs x-axeln ta Dirichletvillkoret $u = -x^2/4$, längs y-axeln Neumanvillkoret $\frac{\partial u}{\partial n} = -u_x = 0$ och längs $x^2 + y^2 = 1$ Robinvillkoret $\frac{\partial u}{\partial n} + 2u = xu_x + yu_y + 2u = x(-x/2) + y(-y/2) + 2(-x^2 - y^2)/4 = -1$. Sökta stabilitetsuppskattningen erhålls genom att multiplicera ekv med u och integrera över Ω som vanligt. Mera om detta i föreläsning 5.

10. Se boken kap 17.2.

11. Lös värmeledningsekvationen i isoleringen med planpolära koordinater, dvs $-\frac{1}{r}(rk_iu')' = 0$, eller förenklat $(ru')' = 0$ med lösning $u(r) = 30 - \frac{20}{\ln(2)}\ln(10r)$, där $v' = \frac{\partial v}{\partial r}$. Beräkna värmeflödet $-k_iu'$ vid $r = 0.2$ och motsvarande u' i marken med konduktiviteten k_m. Bestäm sedan σ så att det givna randvillkoret stämmer då marktemperaturen är 10. Svar (?): $\sigma = \frac{k_i}{k_m}\frac{10}{\ln(2)}$.

12. Golvvärme. Isolera väggarna. $g = 20$.

13. Se uppgift 7.

14. Multiplicera ekv med u och integrera över Ω. Utnyttja Greens formel och Cauchys olikhet på integralen $\int_{\partial\Omega} gu$ och sedan olikheten $2ab \leq a^2 + b^2$ med lämpligt valda a och b.