**pdef01 - inledande övningar**

=============================================

1. Sätt $u = (x, y)$ och $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
Verifiera Gauss divergenssats $\int_{\partial\Omega} u \cdot n = \int_\Omega \operatorname{div} u$ i detta fall.
Eftersom $\nabla \times u = 0$ (visa detta) finns potential $\phi$ sådan att $u = -\mathrm{grad}\phi$.
Bestäm en sådan $\phi$ och beräkna $\|\phi\|$ och $\|\nabla\phi\|$.

2. Visa att för en lösning till värmeledningsekvationen (med homogena Dirichlet randvärden och $f = 0$) gäller $\|\nabla u(t)\| \leq \|\nabla u_0\|$.

3. Från uppskattningen $\|\dot{u}(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{t}\|u_0\|$ följer att $\int_\epsilon^t \|\dot{u}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t}{\epsilon}\|u_0\|$. Verifiera detta!. Visa sedan med hjälp av en uppskattningen vi tidigare erhållit för $\int_0^t s\|\Delta u\|^2$ den skarpare uppskattningen $\int_\epsilon^t \|\dot{u}\| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\ln\frac{t}{\epsilon}}\|u_0\|$.

4. Härled uppskattningar för $\|u\|$ och $\|\nabla u\|$ för lösningen till $-\Delta u + u = f$ i $\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ på $\partial\Omega$.

5. Visa att för en lösning till vågekvationen (med homogena Dirichlet randvärden och $f = 0$) konserveras $\|\nabla\dot{u}\|^2 + \|\Delta u\|^2$.

6. Finn en energi som konserveras av vågekvationen med randvillkoret $\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0$ och $f = 0$.

7. Bestäm en konstant $C_\Omega$, så liten som möjligt, sådan att $\|u\| \leq C_\Omega\|\nabla u\|$ för alla $u$ sådana att $u = 0$ på $\partial\Omega$ för $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1\}$.

8. Låt $u_1$ och $u_2$ vara lösningar till Poissons ekvation med högerled $f_1$ resp. $f_2$ och homogena Dirichlet randvärden. Visa att $\|u_1 - u_2\| \leq C_\Omega^2\|f_1 - f_2\|$. Kan det finnas med än en lösning till Poissons ekvation med givna Dirichlet randvärden? Motivera! Kan det finns mer än en lösning till värmeledningsekvationen med givna Dirichlet randvärden och begynnelsevärden?

9. Verifiera att $u = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ löser $-\Delta u = 1$. Ange sedan en kombination av Dirichlet, Neuman och Robin randvillkor längs randen till $\Omega = \{(x, y) : x, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ som $u$ satisfierar, och som tillsammans med den givna Poissonekvationen entydigt bestämmer $u$. Härled en stabilitetsuppskattning för $u$ med de givna randvillkoren som visar entydigheten.

10. Härled en motsvarighet till ekvationen $m\ddot{u} = f - l\dot{u} - (ku')'$ för en transversellt svängande "diskret sträng" bestående av $n$ massor sammankopplade med fjädrar. Designa den diskreta modellen så att då $n \to \infty$ erhålles ekvationen för den svängande "kontinuerliga strängen".

11. Betrakta ett fjärrvärmerör med radie 0.1 och en lika tjock isolering med konduktiviteten $k_i$. Beräkna värmeflödet ut från röret om vattnet i röret är $30^o$ och marktemperaturen $10^o$ med Dirichlet randvillkor.
I en modell för hur spillvärmet från röret sprider sig i marken vill man använda en förenklad modell av röret med given radie 0.2 och med randvillkor av typen $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \sigma 30^o$. Bestäm $\sigma$ om markens konduktivitet är $k_m$.

12. Betrakta ett hus enligt figur nedan. För temperaturen $u$ i huset gäller $\Delta u = 0$ med randvillkor $\frac{\partial u}{\partial n} + 0.1u = -1$ längs taket, $\frac{\partial u}{\partial n} + u = -10$ längs väggarna och $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ längs golvet.
Vilket uppvärmningssystem kan man tänka sig att huset har?
Vilken energisparåtgärd borde vidtas i första hand?
Approximera huset med en endimensionell modell enligt figur. Bestäm $g$ så att medeltemperaturen $\bar{u} = \int_0^1 u$ i huset blir $20^o$.
Vad blir $g$ efter föreslagen energisparåtgärd?

13. Visa med hjälp av $\int_\Omega v^2 \Delta\phi = \int_{\partial\Omega} v^2 \frac{\partial\phi}{\partial n} - \int_\Omega 2v\nabla v \cdot \nabla\phi$, med $\phi$ vald så att $\frac{\partial\phi}{\partial n} = 1$, att $\int_{\partial\Omega} v^2 \leq C(\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2)$ för någon konstant $C = C_\Omega$.

14. Visa att för lösningen till $-\Delta u + u = 0$ i $\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ på $\partial\Omega$ gäller $\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 = \int_{\partial\Omega} gu \leq \frac{C}{2}\int_{\partial\Omega} g^2 + \frac{1}{2C}\int_{\partial\Omega} u^2$, och därmed (enl. uppg. 13) $\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \leq C\int_{\partial\Omega} g^2$.