TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26

==

1. a) Räknar i polära koordinater med $r = |x|$, och söker lösning $u = u(r)$ sådan att $\Delta u = r^{-2}(r^2u')' = -\delta_\epsilon$, dvs

$$r^2u' = \int r^2(-\delta_\epsilon) = \begin{cases} -\frac{3}{4\pi\epsilon^3}\frac{r^3}{3} + C_1 & \text{för } r < \epsilon \\ C_2 & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Insättning av $r = 0$ ger $C_1 = 0$, varefter kontinuitet för $r = \epsilon$ ger $C_2 = -\frac{1}{4\pi}$. Division med r^2 och ny integration ger

$$u(r) = \begin{cases} .. \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}(+C_3) & \text{för } r > \epsilon. \end{cases}$$

Då $\epsilon \to 0$ erhålls $u(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$, dvs $u(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$.
b) Lösning ges av $u(x) = \int_{R^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} f(y)dy$.
c) Beräknar $u(x)$ i $x = (0, 0, R)$ för $R > 1$ (lättast integral fås med $R = 0$) med hjälp av rymdpolära koordinater $r(\cos(\phi)\cos(v), \sin(\phi)\sin(v), \cos(v))$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|y|<1} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{3}{4\pi}dy \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R-r\cos(\mathrm{v}))^2+r^2\sin^2(v)}} r^2\sin(v)\, d\phi\, dv\, dr \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{3}{4\pi}2\pi\int_0^1\int_0^\pi \frac{r^2\sin(v)}{\sqrt{R^2-2Rr\cos(v)+r^2}}\, dv\, dr \\ &= \frac{6}{16\pi}\int_0^1 \frac{r}{R}[\sqrt{R^2-2Rr\cos(v)+r^2}]_{v=0}^{v=\pi} dr \\ &= \frac{6}{16\pi}\frac{1}{R}\int_0^1 2r^2\, dr = \frac{1}{4\pi R}. \end{aligned}$$

c) Sätter $u = e^{-r}\frac{1}{4\pi r}$ och beräknar

$$\begin{aligned} \Delta u &= r^{-2}(r^2u')' = r^{-2}(r^2(-e^{-r}\tfrac{1}{4\pi r} - e^{-r}\tfrac{1}{4\pi r^2}))' \\ &= r^{-2}\tfrac{1}{4\pi}(-e^{-r}r - e^{-r})' = r^{-2}\tfrac{1}{4\pi}e^{-r}r = u, \end{aligned}$$

dvs $-\Delta u + u = 0$ för $r > 0$ v.s.v. För att visa att $-\Delta u + u = \delta$ noterar vi att $-\Delta u + u = -\Delta\frac{1}{4\pi r} - \Delta(e^{-r} - 1)\frac{1}{4\pi r} + e^{-r}\frac{1}{4\pi} = ...$

2. Enligt uppgift 1 ger $u(x) = \int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy$ en lösning till $\Delta u = 0$ i Ω. Söker därför ϕ så att även randvillkoret $u = g$ uppfylls, dvs

$$\int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy = g(x) \quad \text{för } x \in \Gamma.$$

Inför rand-element, dvs delar in Γ i disjunkta element K_i sådana att $\Gamma = \cup_{i=1}^m K_i$, och ansätter (approximativ lösning) $\phi(y) = \sum_i \phi_i\Phi_i(y)$ där $\Phi_i(y) = 1$ på element K_i och $= 0$ för övrigt. För att bestämma lämpliga koefficienter ϕ_i används (t.ex.)

$$\int_{K_j}\int_\Gamma \phi(y)\frac{1}{4\pi|x-y|}dy\, dx = \int_{K_j} g(x)dx, \quad j = 1, .., m,$$

vilket ger m ekvationer för beräkning av koefficienterna $\phi_1, .., \phi_m$ i $\phi(y)$, som i sin tur ger $u(x)$.

3. a)-d) Se föreläsningsanteckningarna.
e) Ja, $a < 0$ ger exponentiell tillväxt i problemet, såväl det givna som dualproblemet. Speciellt blir stabilitetskonstanten $\int_0^T |\dot{\Phi}|$ i a posteriori feluppskattningen stor för stora T.

4. a) Integration över Ω av givna ekvationen $i\,\dot{u} - \Delta u = 0$ multiplicerad med $\bar{u}$ samt partiell integration ger

$$0 = \int_\Omega \bar{u} i \dot{u} - \int_\Omega \bar{u} \Delta u = \int_\Omega i(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) + u_2 \dot{u}_1 - u_1 \dot{u}_2 + \nabla \bar{u} \cdot \nabla u,$$

med imaginärdel

$$\int_\Omega u \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega u_1^2 + u_2^2,$$

som alltså måste vara $= 0$, dvs $\int_\Omega |u|^2$ är tidsoberoende, v.s.v.

b) Multiplikation av egenvärdesekvationen $-\Delta u = \lambda u$ med u, integration över Ω, och partiell integration ger

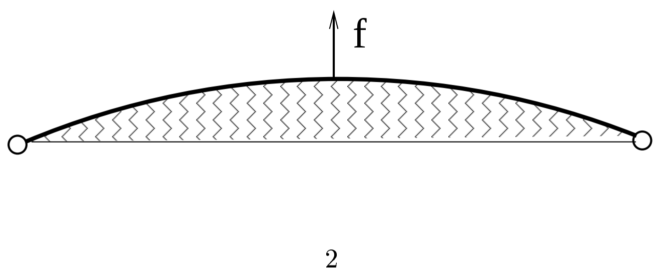
$$\lambda \underbrace{\int_\Omega u^2}_{\geq 0} = \int_\Omega u(-\Delta u) = \underbrace{\int_\Omega |\nabla u|^2}_{\geq 0},$$

dvs $\lambda \geq 0$ (med sträng olikhet för $u \neq 0$) och $||u|| = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} ||\nabla u||$, dvs konstanten C i olikheten $||u|| \leq C||\nabla u||$, gällande för alla u sådana att $u = 0$ på Γ, kan inte vara mindre än $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ där $\lambda_1 > 0$ är det minsta egenvärdet. I själva verket gäller olikheten $||u|| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} ||\nabla u||$ för alla u sådana att $u = 0$ på Γ, eftersom u kan uttryckas i egenfunktionerna och dessa är parvis ortogonala, både "utan och med gradienter", dvs $\int_\Omega u_i u_j = 0$ och $\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla u_j = 0$ för $i \neq j$, men detta ingick inte i uppgiften.

5. a) Fysikaliska tolkning:

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

modellerar en balk med vertikal förskjutning $u = u(x)$ p.g.a. en vertikal last $f = f(x)$, delvis balanserad av en "återhållande" kraft u. Balken är (momentfritt $u'' = 0$) förankrad med $u = 0$ för $x = 0$ och $x = 1$.



b) Multiplikation av de två ekvationerna i systemet med testfunktioner ϕ och ψ, med $\phi = \psi = 0$ för $x = 0$ och $x = 1$, ger efter partiell integration

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi' u' - \phi v) = 0 \\ \int_0^1 (-\psi' v' + \psi u) = \int_0^1 \psi f. \end{cases}$$

Indelar $[0,1]$ i element $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $x_j = j/(m+1)$, och ansätter styckvis linjära approximativa lösningar $U(x) = \sum_{j=1}^m U_j \phi_j(x)$ och $V(x) = \sum_{j=1}^m V_j \phi_j(x)$, där $\phi_j(x)$ är de vanliga hatt-bas funktionerna, och söker nodvärden U_j och V_j sådana att

$$\begin{cases} \int_0^1 (-\phi_i' U' - \phi_i V) = 0, \quad i = 1,..,m \\ \int_0^1 (-\phi_i' V' + \phi_i U) = \int_0^1 \psi f, \quad i = 1,..,m. \end{cases}$$

Detta ger $2m$ ekvationer för de $2m$ sökta nodvärdena $U = [U_1 .. U_m]^\top$ och $V = [V_1 .. V_m]^\top$, vilket kan skrivas på matrisform som

$$\begin{cases} -SU - MV = 0, \\ -SV + MU = F, \end{cases}$$

där S och M är de vanliga styvhets och massmatriserna med element $2/h$ respektive $2h/3$ på diagonalerna, $-1/h$ resp. $h/6$ på sub och superdiagonalerna, och nollor för övrigt, och F är lastvektorn med element $\int_0^1 \phi_i f$.
Första ekvationen ger $V = -M^{-1}SU$ vilket insatt i den andra ger $(SM^{-1}S + M)U = F$, dvs $U = (SM^{-1}S + M)^{-1}F$.

c) Multiplicerar första ekvationen med $-v$ och den andra med u, adderar de två, integrerar, och integrerar partiellt. Detta ger

$$\int_0^1 u^2 + v^2 = \int_0^1 uf,$$

dvs

$$||u||^2 + ||v||^2 = \int_0^1 u\, f \le ||u||\, ||f||,$$

varifrån följer att $||u|| \le ||f||$, och därmed att $||v|| \le ||f||$.
Alternativt kan första ekvationen multipliceras med $-u$ och den andra med $-v$, adderas, integreras, och integreras partiellt, vilket ger

$$\int_0^1 (u')^2 + (v')^2 = \int_0^1 (-v)f \le ||v||\, ||f|| \le ||v'||\, ||f||,$$

varav följer att $||v'|| \le ||f||$ och sedan $||u'|| \le ||f||$.

(Med dessa grundläggande stabilitetsuppskattningar givna kan man sedan använda ekvationerna till att uppskatta t, som t.ex. momentet $v = u''$:

$$||u''|| = ||v|| \le ||f||,$$

och v'':

$$||v''|| = ||f - u|| \le ||f|| + ||u|| \le 2||f||,$$

om man så vill.)