TMA 690 Partiella differentialekvationer F3, 2001-10-26
Telefonjour/rond: Richards Grzibovski, tel. 0740-459022
Hjälpmedel: Beta och CTH-typgodkänd kalkylator.
==

1. a) Härled en lösning u till ekvationen $-\Delta u = \delta$ i R^3, där $\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x)$,

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\epsilon^3} & \text{för } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{för } |x| > \epsilon. \end{cases}$$

b) Visa hur lösningen i a) kan utnyttjas till att lösa $-\Delta u = f$ för godtycklig funktion f.
c) Låt f vara funktionen som är $= \frac{3}{4\pi}$ i $\{x : |x| < 1\}$ och $= 0$ för övrigt, och beräkna lösningen $u(x)$ enligt b) i någon (valfri) punkt i rummet, alternativt, undersök huruvida lösningen i a) multiplicerad med $e^{-|x|}$ ger en lösning till ekvationen $-\Delta u + u = \delta$. (10p)

2. Formulera en rand-elementmetod för (approximativ) lösning av problemet

$$-\Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = g \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där Ω är ett begränsat område i R^3, och $\partial\Omega$ är randen till Ω. (10p)

3. a) Formulera cG1 metoden för tidsdiskretisering av $\dot{u} + a\,u = f$ för $t > 0$, med givet begynnelsevillkor $u(0) = u_0$.
b) Vilket numeriskt problem kan uppstå om a är stort i förhållande till tidssteget.
c) Vad menas med residualfelet och hur figurerar detta i en a posteriori feluppskattning för metoden.
d) Skissera huvuddragen i härledningen av en sådan uppskattning.
e) Spelar tecknet på a någon roll i sammanhanget, t.ex. för (dual)problemets stabilitetsegenskaper? (10p)

4. a) Betrakta "Schrödingerekvationen"

$$i\,\dot{u} - \Delta u = 0 \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega,$$

där $i = \sqrt{-1}$ och $u = u_1 + i\,u_2$. Visa (genom att multiplicera med $\bar{u} = u_1 - i\,u_2$ och betrakta imaginärdelarna) att kvantiteten $\int_\Omega |u|^2$ (dvs "totalsannolikheten") är tidsoberoende.
b) Betrakta motsvarande "egenvärdesproblem", dvs att hitta tal λ och motsvarande lösningar $u \neq 0$ sådana att

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega.$$

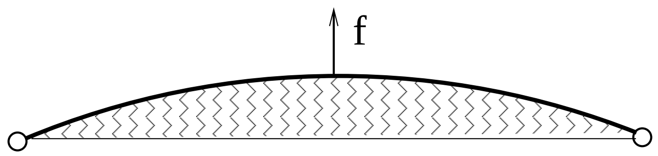
Visa att sådana λ måste vara > 0, och ange sambandet mellan $||u||$ och $||\nabla u||$ för motsvarande egenfunktioner u.
Vilket är det minsta värde på konstanten C för vilken olikheten $||u|| \leq C\,||\nabla u||$ kan tänkas gälla för alla funktioner u sådana att $u = 0$ på $\partial\Omega$, uttryckt i minsta egenvärdet λ_1? (10p)

Var god vänd !

5. Betrakta problemet

$$u'''' = f - u \quad \text{för } 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0, u''(0) = 0, u''(1) = 0.$$

a) Ge en fysikalisk tolkning av ekvation och randvillkor, med ledning av figuren.
b) Formulera en cG1 finit elementmetod för problemet, utgående från följande



ekvivalenta *system* av ekvationer:

$$\begin{cases} u'' - v = 0 \\ v'' + u = f. \end{cases}$$

Ange speciellt hur nodvärdesvektorn U kan beräknas från lastvektorn F uttryckt i tillhörande styvhets- och massmatriser.
c) Härled en stabilitetsuppskattning för lösningen u och v (alternativt motsvarande diskreta lösning U och V) i termer av f. Tips: Multiplicera ekvationerna med v resp. u. Uppskattningen $||v|| \leq C\,||v'||$ som i uppgift 4, kan också bli användbar. (10p)

Lycka till / K.E.