Intro Math K + Kf + Bt

Lecture 1:

Heltal och Induktion

AMB&S: kap 5 & 6

Tal, översikt

- N, naturliga: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$ (att räkna får med)
- Z, hela (integers): $..\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, ..$
- Q, rationella: $\frac{4}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{-3}{1},\ \frac{23}{117},\ \ldots$
- R, reella: (rationella samt *irrationella*).
- C, komplexa (par av reella)

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

Naturliga tal

Modeller

för *antal* kor, bilar eller nånting annat.
Enklast:

1 för *en* ko, *en* bil eller *en* mattelektion.

Sedan:

$2 = 1 + 1$ för *två* kor, dvs *en* ko och *en till* ko, osv.

Vidare:

$$3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1, \quad 4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1, \quad \text{osv}$$

Algebra

Addition $+$

Definition

Hmm..

$$3 + 2 = (1 + 1 + 1) + (1 + 1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Räkneregler

- $m + n = n + m$ addition *kommutativ*
- $m + (n + p) = (m + n) + p$ addition *associativ*

Algebra

Multiplikation $\times$, alt. $*$, alt.

Definition

$$m \times n = \underbrace{n + n + .. + n}_{m \text{ stycken}}.$$

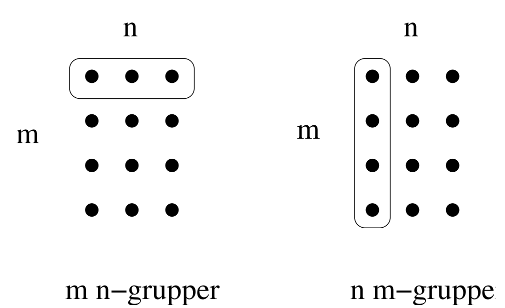
Dvs multiplikation är upprepad addition.

Räkneregler

- $m \times n = n \times m$ mult. *kommutativ*
- $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$ mult. *associativ*

Algebra

Bevis

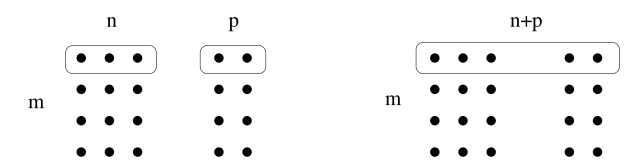


Algebra

Distributiva lagen

$$m \times (n + p) = m \times n + m \times p.$$

Bevis



Terminologi

termer, *summa*, *faktorer*, *produkt*

Algebra

Generalisering

$$(m + n) \times (p + q) = m \times p + m \times q + n \times p + n \times q.$$

Varför?

Algebra

Potens

Definition

$$n^p = \underbrace{n \times n \times .. \times n}_{p \text{ stycken}}.$$

Dvs potens innebär uppredad multiplikation.

Räkneregler

- $(n^p)^q = n^{p \times q}$
- $n^p \times n^q = n^{p+q}$
- $n^p \times m^p = (n \times m)^p$.

Algebra

Bevis

$$n^p \times n^q = \underbrace{n \times n \times .. \times n}_{p \text{ st}} \times \underbrace{n \times n \times .. \times n}_{q \text{ st}}$$

$$= \underbrace{n \times n \times .. \qquad .. \times n}_{p+q \text{ st}} = n^{p+q}.$$

Hitta själv!

Storleksordning

De naturliga talen är *ordnade* på ett "naturligt" sätt:

$$1 < 2 < 3 < 4 < .. < n-1 < n < n+1 < ..$$

Räkneregler

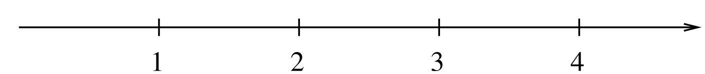
- $m < n < p \Rightarrow m < p$
- $m < n \Rightarrow m + p < n + p$
- $m < n \Rightarrow p \times m < p \times n$ (se upp!)
- $m < n$ och $p < q \Rightarrow m + p < n + q$

Bevis ?

Algebra

Kanske m.h.a.

Tallinjen



Talet 0

Tillför talet 0 med egenskaperna

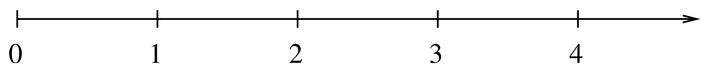
$$n + 0 = 0 + n = n,$$

och

$$n \times 0 = 0 \times n = 0,$$

samt

$$n^0 = 1 \quad \text{(kan motiveras “praktiskt”)}$$



Tiosystemet

Hur göra när siffrorna tar slut? Har ju bara $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...$

Inför ett *positionssystem*

Talet $9 + 1$ betecknas 10. Mera allmänt

$$4237 = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

Säger att talet 10 är *basen* i detta system.

Binära systemet

I dator används *bas 2 systemet*:

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, ..$$

t.ex.

$$1001 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 0 + 1 = 9.$$

För att inte 1001 skall tolkas som “ett tusen ett” kan skrivas 1001_2 t.ex.

Subtraktion

Modellerar att “avlägsna”. T.ex. $12 - 7 = 5$ med enhet “munkar”. Noterar att $7 - 12$ ej är ett naturligt tal.
Inför “anti-talen” eller de “negativa” (hel)talen

$$-1, -2, -3, -4, ..$$

med egenskapen att $(-n) + n = n + (-n) = 0$, och allmänt att $m - n = m + (-n)$ där addition av det negativa talet $-n$ motsvarar stegning åt vänster på tallinjen, nu omfattande även antitalen $-1, -2, -3, ..$

Mult. med negativa tal

Definition

$$(-n) \times m = -n \times m,$$

$$0 = 0 \times m = ((-n) + n) \times m = (-n) \times m + n \times m.$$

Vad bör menas med $(-n) \times (-m)$? Eftersom

$$0 \times 0 = ((-n) + n) \times ((-m) + m)$$

$$= (-n) \times (-m) + (-n) \times m + \underbrace{n \times (-m) + n \times m}_{=0}$$

$$= (-n) \times (-m) - n \times m,$$

följer att $(-n) \times (-m) = n \times m$!

Belopp

Absolutbeloppet

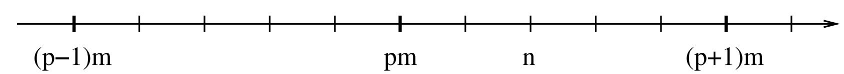
$$|p| = \begin{cases} p \text{ om } p > 0 \\ -p \text{ om } p < -0 \end{cases}$$

mäter storleken på talet p.
T.ex. gäller att $|-1000| > |10|$, trots att $-1000 < 10$.

Notera att $|m - n|$ kan uppfattas som *avståndet* mellan m och n på tallinjen.

Division

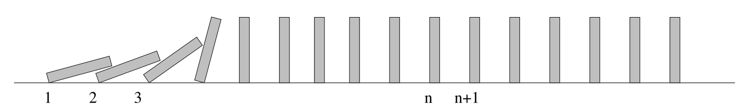
m=5 and n=pm+r with r=2<m



Division med rest

Från n kan subtraheras p stycken m, men inte fler. Lämnar viss rest $0 \leq r < m$, dvs $n - pm = r$, eller $n = pm + r$.

Induktion



Induktionsprincipen

Om
1 faller, och
$n + 1$ faller om n faller, för alla n
så
"faller alla"

Exempel

Aritmetisk summa

Påstående:

$$2\,(1+2+3+\,..\,+n) = n^2+n = (n+1)\,n.$$

Gäller för $n=1$ (dvs “1 faller”)
Om påståendet giltigt för ett visst n (“n faller”) så följer att

$$2\,(1+2+3+..+n+(n+1)) = n^2+n+2\,(n+1) = (n+2)(n+1),$$

dvs “$n+1$ faller”. Induktionsprincipen ger nu att “alla faller”, dvs påståendet giltigt för alla n. VSB

Analogt kan visas t.ex. att

$$6(1+4+9+16+25+\,..\,+n^2) = 2n^3+3n^2+n.$$

Exempel

Geometrisk summa

Påstående:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\,..\,+\frac{1}{2^n} = 2-\frac{1}{2^n}.$$

Gäller för $n=1$.
Om giltig för givet n (“n faller”) så följer att

$$1+\frac{1}{2}+\,..\,+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}} = 2\underbrace{-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}}_{-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

dvs “$n+1$ faller”. Följer nu av induktionsprincipen att påståendet giltigt för alla n.

Exempel

Harmonisk summa

Påstående: För varje n finns något N sådant att

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\,..\,+\frac{1}{N} > n.$$

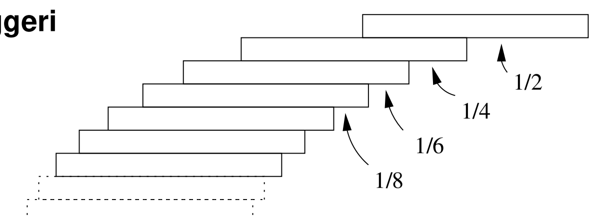
Klart för $n=1$, med $N=2$.
Antag nu att n faller, dvs att formeln giltig för ett visst n. Då följer

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\,..\,+\frac{1}{N}}_{>n}+\underbrace{\frac{1}{N+1}+\,..\,+\frac{1}{2N}}_{>1/2}+\underbrace{\frac{1}{2N+1}+\,..\,+\frac{1}{4N}}_{>1/2} > n+1,$$

dvs “$n+1$ faller”. Följer nu att påståendet giltigt för alla n.

Tillämpningar:

Brobyggeri



Finns ingen gräns för hur långt man kan bygga en bro utan stöd från andra sidan.

Skinnarmos problem

Spännande upplösning i nästa nummer!