Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar del A, för Kb.

Lösningar till tentamen 2001–10–22.

Problem 1.
(a) –
(b) –
(c) –
(d) –

Problem 2.
(a) –
(b) –
(c) Låt $\mathcal{P}(0,1)$ beteckna vektorrummet av linjära funktioner på intervallet $I = [0,1]$. Enligt definition av L_2*-projektion* är $Pf \in \mathcal{P}(0,1)$ den (entydigt bestämda) funktion som uppfyller,

$$\int_0^1 Pf\, v\, dx = \int_0^1 f\, v\, dx, \quad \forall v \in \mathcal{P}(0,1). \tag{1}$$

Eftersom $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathcal{P}(0,1)$, där $\lambda_1(x) = 1 - x$ och $\lambda_2(x) = x$, är en *bas* för $\mathcal{P}(0,1)$ är (1) ekvivalent med,

$$\int_0^1 Pf\, \lambda_i\, dx = \int_0^1 f\, \lambda_i\, dx, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Ansätt

$$Pf(x) = c_1\lambda_1(x) + c_2\lambda_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Insättning av (3) i (2) ger,

$$\sum_{j=1}^{2} c_j \underbrace{\int_0^1 \lambda_j\, \lambda_i\, dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 f\, \lambda_i\, dx}_{b_i}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

På matrisform,

$$Mc = b. \tag{5}$$

Vi beräknar,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f\, \lambda_1\, dx \\ \int_0^1 f\, \lambda_2\, dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 x^2\,(1-x)\, dx \\ \int_0^1 x^2\, x\, dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \lambda_1\,\lambda_1\,dx & \int_0^1 \lambda_2\,\lambda_1\,dx \\ \int_0^1 \lambda_1\,\lambda_2\,dx & \int_0^1 \lambda_2\,\lambda_2\,dx \end{bmatrix} =$$

(7)

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (1-x)\,(1-x)\,dx & \int_0^1 x\,(1-x)\,dx \\ \int_0^1 (1-x)\,x\,dx & \int_0^1 x\,x\,dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Slutligen fås,

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M^{-1}b = \tfrac{1}{\det M} \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

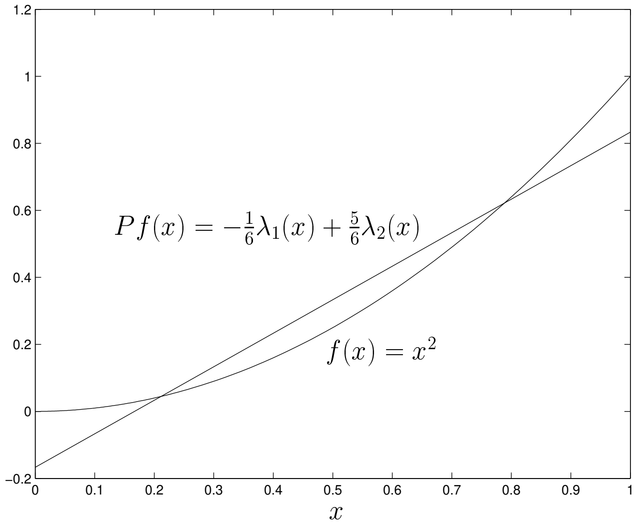
(8)

$$\tfrac{1}{(1/3)^2-(1/6)^2} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 5/6 \end{bmatrix},$$

d.v.s.,

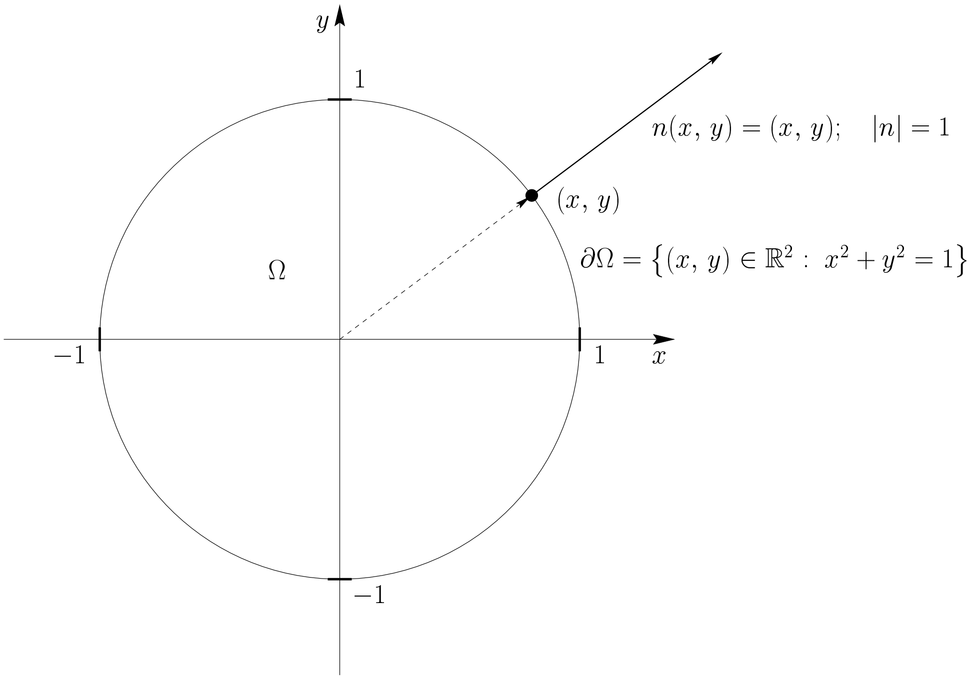
(9) $$Pf(x) = -\frac{1}{6}\lambda_1(x) + \frac{5}{6}\lambda_2(x).$$

Se Figur 1.



FIGUR 1. Problem 2(c).

Problem 3.
(a) –
(b) –
(c) $\nabla w = (\frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial w}{\partial y}) = (\sin y,\, x\cos y)$; $b \cdot \nabla w = (1,\,0)\cdot(\frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial w}{\partial y}) = \frac{\partial w}{\partial x} = \sin y$; $\Delta w = \nabla\cdot(\nabla w) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 + (-x\sin y) = -x\sin y$.
(d) Differentialekvation: $-\nabla\cdot(\nabla u) = -\Delta u = -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = -(-1/2+(-1/2)) = 1$. Randvillkor: $-n\cdot(\nabla u) = -n\cdot(\frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y}) = -n\cdot(-x/2,\, -y/2) =$ (se Figur 2) $= -(x,\,y)\cdot(-x/2,\,-y/2) = (x^2+y^2)/2 = 1/2$, på $\partial\Omega$.
(e) –



FIGUR 2. Problem 3(d).

Problem 4.
(a) –
(b) –
(c) –
(d) Antag att $U_1 \in V_h$ och $U_2 \in V_h$ är två lösningar, d.v.s.,

$$\int_{\partial\Omega} \gamma U_1 v\, ds \;+\; \iint_{\Omega} a\, \nabla U_1 \cdot \nabla v\, dx_1 dx_2 \;=\; \int_{\partial\Omega} (\gamma g_D - g_N) v\, ds \;+\; \iint_{\Omega} f v\, dx_1 dx_2, \tag{10}$$

och,

$$\int_{\partial\Omega} \gamma U_2 v\, ds \;+\; \iint_{\Omega} a\, \nabla U_2 \cdot \nabla v\, dx_1 dx_2 \;=\; \int_{\partial\Omega} (\gamma g_D - g_N) v\, ds \;+\; \iint_{\Omega} f v\, dx_1 dx_2, \tag{11}$$

$\forall v \in V_h$. Subtrahera (11) från (10),

$$\int_{\partial\Omega} \gamma (U_1 - U_2) v\, ds \;+\; \iint_{\Omega} a\, \nabla (U_1 - U_2) \cdot \nabla v\, dx_1 dx_2 \;=\; 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{12}$$

Välj $v = U_1 - U_2$ i (12),

$$\int_{\partial\Omega} \gamma (U_1 - U_2)^2\, ds \;+\; \iint_{\Omega} a\, |\nabla (U_1 - U_2)|^2\, dx_1 dx_2 \;=\; 0. \tag{13}$$

Eftersom $\gamma \geq 0$ och $a > 0$ följer från (13) att,

$$\gamma (U_1 - U_2)^2 \;=\; 0, \quad \text{på } \partial\Omega, \tag{14}$$

$$|\nabla(U_1 - U_2)|^2 \;=\; 0, \quad \text{i } \Omega. \tag{15}$$

Vi drar på grund av (15) slutsatsen att $U_1 - U_2 =$ *konstant*, i Ω. Men eftersom enligt förutsättning $\gamma > 0$ på en del av $\partial\Omega$ följer ur (14) att $U_1 = U_2$ på denna del av randen. Därmed måste konstantens värde vara lika med 0, d.v.s., $U_1 = U_2$, i Ω. Vi har därmed visat *entydighet* hos lösning. Men eftersom denna satisfierar ett kvadratiskt, linjärt ekvationssystem, följer omedelbart *existens* ur den *linjära algebrans fundamentalsats.*

Problem 5. Kalla trianglarna för K_1 och K_2 (se Figur 3), samt låt $\mu(K_1)$ beteckna arean av K_1 och $\mu(K_2)$ beteckna arean av K_2: $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1/2$.
(a) Med kvadratur baserad på integrandens värden i triangelsidornas mittpunkter, vilken är exakt för andragradspolynom, fås,

$$\begin{gathered} m_{11} \;=\; \iint_\Omega \varphi_1\varphi_1\, dxdy \;=\; \iint_{K_1} \varphi_1\varphi_1\, dxdy \;+\; \iint_{K_2} \varphi_1\varphi_1\, dxdy \;= \\ \tfrac{\frac12\times\frac12+\frac12\times\frac12+0\times0}{3}\,\mu(K_1) \;+\; \tfrac{\frac12\times\frac12+\frac12\times\frac12+0\times0}{3}\,\mu(K_2) \;=\; 1/6. \end{gathered} \tag{16}$$

Av symmetriskäl fås de övriga elementen i massmatrisens huvuddiagonal enligt,

$$m_{44} = m_{11} = 1/6; \quad m_{22} = m_{33} = \frac{1}{2}m_{11} = 1/12. \tag{17}$$

Notera att m_{22} och m_{33} endast erhåller bidrag från en triangel. Vidare fås,

$$\begin{gathered} m_{12} \;=\; \iint_\Omega \varphi_2\varphi_1\, dxdy \;=\; \iint_{K_2} \varphi_2\varphi_1\, dxdy \;= \\ \tfrac{\frac12\times0+\frac12\times\frac12+0\times\frac12}{3}\,\mu(K_2) \;=\; 1/24, \end{gathered} \tag{18}$$

och av symmetriskäl,

$$m_{21} = m_{24} = m_{42} = m_{13} = m_{31} = m_{34} = m_{43} = 1/24; \quad m_{14} = m_{41} = 1/12. \tag{19}$$

Notera att m_{14} och m_{41} erhåller bidrag från två trianglar. Slutligen fås,

$$m_{23} = m_{32} = 0, \tag{20}$$

eftersom φ_2 och φ_3 aldrig är skilda från noll samtidigt.
(b) Eftersom $\varphi_1(x,\, y) = y$, för $(x,\, y) \in K_1$, och $\varphi_1(x,\, y) = 1 - x$, för $(x,\, y) \in K_2$, fås,

$$\begin{gathered} a_{11} \;=\; \int_{\partial\Omega} \varphi_1\varphi_1\, ds \;+\; \iint_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1\, dxdy \;= \\ \int_0^1 \overbrace{\varphi_1(0,\, y)^2}^{y^2}\, dy \;+\; \int_0^1 \overbrace{\varphi_1(x,\, 1)^2}^{(1-x)^2}\, dx \;+ \\ \iint_{K_1} \overbrace{\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1}^{(0,\,1)\cdot(0,\,1)}\, dxdy \;+\; \iint_{K_2} \overbrace{\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1}^{(-1,\,0)\cdot(-1,\,0)}\, dxdy \;= \\ 1/3 \;+\; 1/3 \;+\; \mu(K_1) \;+\; \mu(K_2) \;=\; 5/3. \end{gathered} \tag{21}$$

Eftersom $\gamma\, g_D - g_N = 1 \times 1 - 1 = 0$, fås för elementen i lastvektorn,

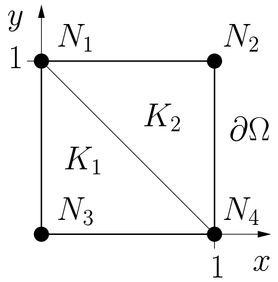
$$b_i = \iint_\Omega \varphi_i \, dxdy, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{22}$$

vilket geometriskt är *volymen* under "tält" φ_i. Alltså blir,

$$b_1 = b_4 = \frac{\overbrace{(\mu(K_1) + \mu(K_2))}^{\text{“basyta”}} \times \overbrace{1}^{\text{“höjd”}}}{3} = 1/3, \tag{23}$$

$$b_2 = \tfrac{\mu(K_2)\times 1}{3} = 1/6; \quad b_3 = \tfrac{\mu(K_1)\times 1}{3} = 1/6,$$

från formeln för volymen av en pyramid.



$\Omega = K_1 \cup K_2$

FIGUR 3. Problem 5.

Problem 6.
(a) –
(b) –
(c) –

Problem 7.
(a) Bakåt Euler: givet ξ^0, lös,

$$M\,\frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{\Delta t} + A\,\xi^n = b, \quad n = 1, 2, \tag{24}$$

d.v.s.,

$$\overbrace{(M + \Delta t\, A)}^{C}\,\xi^n = M\xi^{n-1} + \Delta t\, b, \quad n = 1, 2, \tag{25}$$

där $\Delta t = 1/2$ och $C = M + \Delta t\, A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Bestäm först ξ^1,

$$C\xi^1 = M\xi^0 + \Delta t\, b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (1/2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$\xi^1 = C^{-1}\begin{bmatrix} 7/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{3\times 5 - 2\times 1}_{\det C}}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31/26 \\ -1/13 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Bestäm nu ξ^2,

(28) $$C\xi^2 = M\xi^1 + \Delta t\, b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31/26 \\ -1/13 \end{bmatrix} + (1/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/13 \\ -1/13 \end{bmatrix},$$

(29) $$\xi^2 = C^{-1} \begin{bmatrix} 21/13 \\ -1/13 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underbrace{3 \times 5 - 2 \times 1}_{\det C}} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/13 \\ -1/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106/169 \\ -45/169 \end{bmatrix},$$

vilket är en approximation till $\xi(1)$.
(b) –