Lösningar till Tentamen 2002–06–01.
TMA225 *Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar* del A, för K1 och Kf1.

1.
(a) Interpolanten $\pi_h g$ är den funktion i V_h som överensstämmer med g i nodpunkterna:

- $\pi_h g \in V_h$,
- $\pi_h g(x_i) = g(x_i)$ för $i = 0, \dots, N$.

(b) $\|g - \pi_h g\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{8}\|h^2 g''\|_{L^\infty(0,1)}$ där $h = h(x)$ är mesh-funktionen för den givna indelningen. *Bevis:* Se kurslitteratur.
(c) $\|g - \pi_h g\|_{L^2(0,1)} \leq C_i \|h^2 g''\|_{L^2(0,1)}$ där C_i $(= \frac{1}{\pi^2})$ är en interpolationskonstant.
(d) Med samtliga delintervall lika långa blir $h(x)$ en *konstant* funktion ($h = \frac{1}{N}$). Högerleden i (b) och (c) kan därmed skrivas:

$$\frac{1}{8}h^2 \|g''\|_{L^\infty(0,1)},$$

respektive

$$C_i h^2 \|g''\|_{L^2(0,1)}.$$

För att få konvergens av andra ordningen i $L^\infty(0,1)$ krävs att $\|g''\|_{L^\infty(0,1)} < \infty$. Eftersom

$$\|g''\|_{L^\infty(0,1)} := \max_{x\in(0,1)} |g''(x)| = \max_{x\in(0,1)} |\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}|,$$

är $\|g''\|_{L^\infty(0,1)} < \infty$ för $\alpha \geq 2$. (Samt för $\alpha = 0, 1$ vilket motsvarar de två lite speciella fallen $g(x) = 1$ och $g(x) = x$, för vilka $g''(x) = 0$ och $g - \pi_h g = 0$ oberoende av h.)

För att få konvergens av andra ordningen i $L^2(0,1)$ krävs att $\|g''\|_{L^2(0,1)} < \infty$. Eftersom

$$\|g''\|^2_{L^2(0,1)} := \int_0^1 g''(x)^2\,dx = \int_0^1 \left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)^2\,dx = \alpha^2(\alpha-1)^2\int_0^1 x^{2\alpha-4}\,dx,$$

är $\|g''\|_{L^2(0,1)} < \infty$ om $2\alpha - 4 > -1$, d.v.s., för $\alpha > 3/2$. (Samt för $\alpha = 0, 1$. Se kommentar ovan.)

2.
(a) Vi har alltså en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ i N lika långa delintervall, d.v.s., $x_i = ih$ där $h = x_i - x_{i-1} = 1/N$. Genom att approximera integralen över varje delintervall med mittpunktskvadratur fås:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^N f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) \cdot h$$

(b) $N = 1$. Nodpunkter: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Delintervallets längd: $h = 1$. Från (a) får vi:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f(\frac{1}{2}) \cdot 1 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

$N = 2$. Nodpunkter: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$. Delintervallens längd: $h = 1/2$. Från (a) fås:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f(\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} + f(\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{24}{35}.$$

$N = 3$. Nodpunkter: $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$. Delintervallens längd: $h = 1/3$. Från (a) fås:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx \approx& f(\frac{1}{6}) \cdot \frac{1}{3} + f(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3} + f(\frac{5}{6}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{1+\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{6}{7} + \frac{2}{3} + \frac{6}{11}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \cdot 2 = \frac{99+77+63}{7 \cdot 9 \cdot 11} \cdot 2 = \frac{478}{693}.\end{aligned}$$

(c) Analytisk beräkning av integralen ger:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (a + bx)\,dx = \left[ax + \frac{b}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} = a + \frac{b}{2}.$$

Mittpunktskvadratur ger:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f(\frac{1}{2}) \cdot 1 = a + \frac{b}{2}.$$

(d) Vid härledning av ekvationssystemet ur vilket finita element-lösningen fås, måste man beräkna ett antal integraler som uppkommit genom att vi variationsformulerat differentialekvationen. För att beräkna dessa integraler kan kvadratur användas.
(e) En-punktsformel:

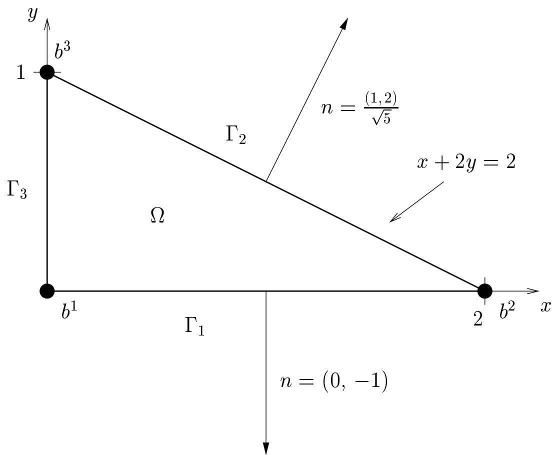
$$\iint_T f(x_1,\, x_2)\,dx_1 dx_2 \approx f(a^{\text{CM}}) \cdot \mu(T).$$

Här betecknar $a^{\text{CM}} = \frac{a^1+a^2+a^3}{3}$ triangelns *tyngdpunkt* ("Center of Mass"), och $\mu(T) = \frac{|(a^2-a^1)\times(a^3-a^1)|}{2}$ triangelns *area*.
Tre-punktsformel:

$$\iint_T f(x_1,\, x_2)\,dx_1 dx_2 \approx \frac{f(a^{12}) + f(a^{13}) + f(a^{23})}{3} \cdot \mu(T),$$

där $a^{12} = \frac{a^1+a^2}{2}$, $a^{13} = \frac{a^1+a^3}{2}$, och $a^{23} = \frac{a^2+a^3}{2}$ är triangelsidornas mittpunkter.

3. (a) $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y^2) = 1$; $\quad \nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x},\, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x + y,\, x + 3y^2)$;
$\nabla \cdot (xy \nabla g) = \nabla \cdot (xy\,(2x+y)\,,\, xy\,(x+3y^2)) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 3xy^3) = 4xy + y^2 + x^2 + 9xy^2$.
(b) $f = -\Delta u = -\nabla \cdot (\nabla u) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -(2+2) = -4$ i Ω;
$g_N = -n \cdot \nabla u = -(0,\, -1) \cdot (2x,\, 2 \cdot 0) = 0$ på Γ_1;
$g_N = -n \cdot \nabla u = -\frac{(1,2)}{\sqrt{5}} \cdot (2x,\, 2y) = -\frac{2x+4y}{\sqrt{5}} = -\frac{2(x+2y)}{\sqrt{5}} = \{x + 2y = 2 \text{ på } \Gamma_2\} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ på Γ_2;
$g_D = u(0,\, y) = y^2$ på Γ_3.
Se Figur 1.



Figur 1: Problem 3(b).

4.
(a) Multiplicera differentialekvationen med en funktion $v = v(x,\, y)$ s.a. $v = 0$ på $\partial\Omega$, och integrera därefter över Ω:

$$-\iint_\Omega (\Delta u) v \, dxdy = \iint_\Omega f v \, dxdy.$$

Integrera partiellt i vänstra ledet:

$$\underbrace{-\int_{\partial\Omega} (n \cdot \nabla u) v \, ds}_{=0, \text{ eftersom } v=0 \text{ på } \partial\Omega} + \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_\Omega f v \, dxdy.$$

Variationsformuleringen blir därmed: Finn $u \in V_0$ s.a.

$$\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_\Omega f v \, dxdy \quad \text{för alla } v \in V_0, \tag{1}$$

där V_0 är rummet av funktioner $v = v(x,\, y)$ s.a. $v = 0$ på $\partial\Omega$, och som är tillräckligt reguljära för att integralerna i (1) skall existera.

(b) *Finita element-metoden* är följande diskreta motsvarighet till (1): Finn $U \in V_{h0}$ s.a.

$$\iint_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_{\Omega} f v \, dxdy \quad \text{för alla } v \in V_{h0}, \tag{2}$$

där V_{h0} är rummet av funktioner $v = v(x,\, y)$ s.a. $v = 0$ på $\partial\Omega$, och som är kontinuerliga och styckvis linjära på en given triangulering (med mesh-funktion h) av Ω.
(c) Eftersom $V_{h0} \subset V_0$ så gäller (1) speciellt för alla funktioner $v \in V_{h0}$. Genom att subtrahera (2) från (1) fås därmed:

$$\iint_{\Omega} \nabla(u-U) \cdot \nabla v \, dxdy = 0 \quad \text{för alla } v \in V_{h0}. \tag{3}$$

(d) $\|g\|_{L^2(\Omega)} := \left(\iint_{\Omega} g(x,\, y)^2 \, dxdy\right)^{1/2}$
Med $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ och $g(x,\, y) = xy$ fås:

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} &= \iint_{\Omega} x^2 y^2 \, dxdy = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 y^2 \, dy \right) dx = \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y^2 \, dy \right) \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(e) Galerkin-ortogonaliteten (3) medför att:

$$\|\nabla(u-U)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{för alla } v \in V_{h0}.$$

Bevis: Se kurslitteratur.
Väljer man speciellt $v = \pi_h u \in V_{h0}$ fås från interpolationsfeluppskattning:

$$\|\nabla(u-U)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\nabla(u - \pi_h u)\|_{L^2(\Omega)} \le C_i \, \|h^2 D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

5.
(a) Ansätt $\lambda_1(x,\, y) = Ax + By + C$, så fås följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1(N_1) = C \\ 0 = \lambda_1(N_2) = 2A + C \\ 0 = \lambda_1(N_3) = B + C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}; \;\; B = -1; \;\; C = 1,$$

d.v.s. $\lambda_1(x,\, y) = 1 - \frac{x}{2} - y$. Analogt kan man bestämma $\lambda_2(x,\, y) = \frac{x}{2}$ och $\lambda_3(x,\, y) = y$.
Kommentar. Man kan alternativt resonera så här: För $\lambda_2(x,\, y)$ vet vi att $\lambda_2(x,\, y) = 0$ för $x = 0$ samt att $\lambda_2(2,\, 0) = 1$. Funktionen $\lambda_2(x,\, y) = \frac{x}{2}$ uppfyller uppenbarligen dessa krav, och eftersom en linjär funktion på en triangel bestäms entydigt av sina tre nodvärden måste detta vara det sökta uttrycket. Analogt inses att $\lambda_3(x,\, y) = y$. Notera slutligen att $\lambda_1(x,\, y) + \lambda_2(x,\, y) + \lambda_3(x,\, y) = 1$ eftersom detta är en linjär funktion som är lika med 1 i samtliga tre noder. Därmed blir $\lambda_1(x,\, y) = 1 - \lambda_2(x,\, y) - \lambda_3(x,\, y) = 1 - \frac{x}{2} - y$!

(b) Från (a) beräknar vi gradienterna: $\nabla\lambda_1 = (-\frac{1}{2},\, -1)$; $\nabla\lambda_2 = (\frac{1}{2},\, 0)$; $\nabla\lambda_3 = (0,\, 1)$. Eftersom gradienterna är konstanta fås:

$$a_{ij} = \iint_\Omega \nabla\lambda_j \cdot \nabla\lambda_i \, dx\, dy = (\nabla\lambda_j \cdot \nabla\lambda_i) \underbrace{\iint_\Omega dx\, dy}_{\mu(\Omega)},$$

där $\mu(\Omega) = 1$ är triangelns area. Genom att beräkna $\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_1 = \frac{5}{4}$; $\nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_2 = \frac{1}{4}$; $\nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_3 = 1$; $\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2 = \nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_1 = -\frac{1}{4}$; $\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_3 = \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_1 = -1$; $\nabla\lambda_2 \cdot \nabla\lambda_3 = \nabla\lambda_3 \cdot \nabla\lambda_2 = 0$, fås därmed

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Givet en mesh T och en finit element-lösning U beräknad på denna mesh:

1. Avgör om *stopp-villkoret* är uppfyllt. Om stopp-villkoret är uppfyllt så är vi färdiga, annars gå vidare till 2.
2. Beräkna *residualen* $R_K(U)$ på varje element K.
3. Välj ut de element som skall förfinas.
4. Beräkna en ny (förfinad) mesh.
5. Beräkna finita element-lösningen på den förfinade meshen och gå tillbaka till 1.

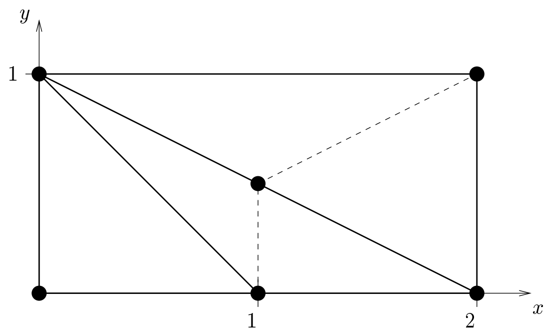
Kommentar. Om stopp-villkoret beror på residualen så byter vi bara ordning på 1. och 2.
(b) Första steget i Rivara-algoritmen är att förfina samtliga trianglar som skall förfinas. Förfining av en triangel görs genom att förbinda mittpunkten på triangelns längsta sida med motstående hörn. Eftersom detta i allmänhet skapar otillåtna trianglar med s.k. "hängande noder" måste även dessa trianglar förfinas. Detta steg upprepas tills inga otillåtna trianglar återstår.
(c) Först förfinas triangel K_3 genom att förbinda mittpunkten på den längsta sidan $(1,\, 0.5)$ med motstående hörn $(2,\, 1)$. Detta medför att triangel K_2 blir en otillåten triangel, eftersom den får en "hängande nod" i $(1,\, 0.5)$. Därmed måste även K_2 förfinas. Den resulterande trianguleringen (med fem trianglar och sex noder) är ritad i Figur 2.

7. Låt $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_L = T$ vara en indelning av tidsintervallet $[0,\, T]$ i tidssteg med längd $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

För $n = 1, \ldots, L$: Lös det linjära ekvationssystemet

$$(M + \Delta t_n A)\xi^n = M\xi^{n-1} + \Delta t_n b(t_n),$$

för att beräkna $\xi^n \approx \xi(t_n)$ givet ξ^{n-1}.



Figur 2: Den förfinade trianguleringen i Problem 6(c).