# Deltentamen 2002-04-25

**TMA225: Differentialekvationer och tekniska beräkningar, del A, för K1/Kf1.**

Lösningar.

**Problem 1.**

(a) Hatt-funktionerna $\varphi_i \in V_h$ definieras av:

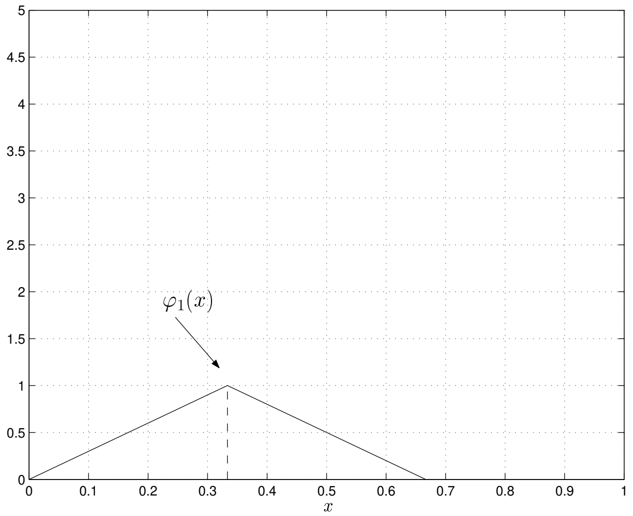
$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j = 0, \ldots, N.$$

De är $N+1$ stycken. Eftersom hatt-funktionerna utgör en *bas* för $V_h$ är *dimensionen* av $V_h$ också lika med $N+1$. (Dimensionen är per definition lika med antalet basvektorer.)

(b)

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x-0}{1/3-0} = 3x, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ \frac{2/3-x}{2/3-1/3} = 2-3x, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 0, & 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se Figur 1.




Figur 1: Problem 1(b). Plot av $\varphi_1$.

(c) Ur figuren ses att $v(0) = 2$, $v(1/3) = 1$, $v(2/3) = 4$ och $v(1) = 3$. Därmed fås

$$\begin{aligned} v(x) &= v(0)\,\varphi_0(x) + v(1/3)\,\varphi_1(x) + v(2/3)\,\varphi_2(x) + v(1)\,\varphi_3(x) \\ &= 2\,\varphi_0(x) + \varphi_1(x) + 4\,\varphi_2(x) + 3\,\varphi_3(x). \end{aligned}$$

**Problem 2.**
(a) Interpolanten $\pi_h g$ av $g$ är den kontinuerliga, styckvis linjära funktion som antar samma värden som $g$ i noderna, d.v.s.:

- $\pi_h g \in V_h$,
- $\pi_h g(x_i) = g(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$

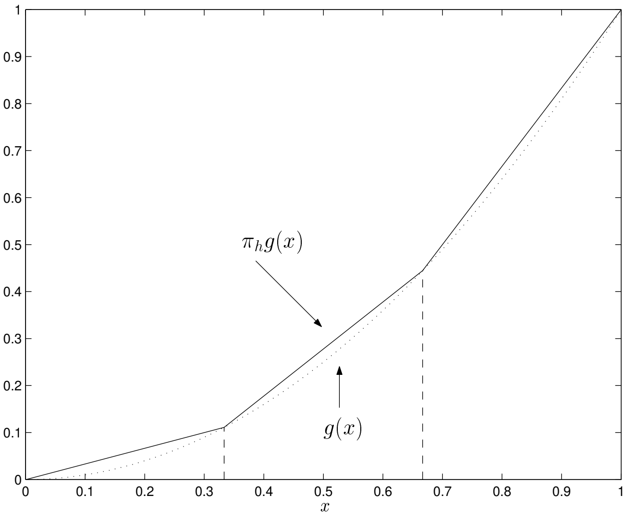
Därmed kan $\pi_h g$ skrivas:

$$\begin{aligned}\pi_h g(x) &= \pi_h g(x_0)\,\varphi_0(x) + \cdots + \pi_h g(x_N)\,\varphi_N(x)\\ &= g(x_0)\,\varphi_0(x) + \cdots + g(x_N)\,\varphi_N(x)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\pi_h g(x) &= g(0)\,\varphi_0(x) + g(1/3)\,\varphi_1(x) + g(2/3)\,\varphi_2(x) + g(1)\,\varphi_3(x)\\ &= \frac{1}{9}\,\varphi_1(x) + \frac{4}{9}\,\varphi_2(x) + \ \varphi_3(x)\end{aligned}$$

Se Figur 2.




Figur 2: Problem 2(b). Plot av $g$ ($\cdots$) och $\pi_h g$ (—).

(c) $\|v\|_{L_\infty(I)} := \max_{x\in I} |v(x)|$
(d) $\|g - \pi_h g\|_{L_\infty(I)} \le \frac{1}{8}\,\|h^2 g''\|_{L_\infty(I)}$, där $h = h(x)$ är mesh-funktionen för indelningen av intervallet $I$ i delintervall.

**Problem 3.**
(a) $L^2$-projektionen $P_h g \in V_h$ av $g$, är den ortogonala projektionen av $g$ på $V_h$ m.a.p. $L^2$-skalärprodukten, och definieras alltså av:

$$\int_0^1 P_h g(x) v(x)\, dx = \int_0^1 g(x) v(x)\, dx \quad \text{för alla } v \in V_h. \tag{1}$$

(b) Eftersom $\{\varphi_i\}_{i=0}^3$ är en bas för $V_h$ så är (1) ekvivalent med:

$$\int_0^1 P_h g(x)\, \varphi_i(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, \varphi_i(x)\, dx \quad \text{för } i = 0, 1, 2, 3. \tag{2}$$

Insättning av ansatsen $P_h g(x) = \sum_{j=0}^3 \xi_j\, \varphi_j(x)$ i (2) ger:

$$\sum_{j=0}^3 \xi_j \underbrace{\int_0^1 \varphi_j(x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_0^1 g(x)\, \varphi_i(x)\, dx}_{b_i} \quad \text{för } i = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

På matrisform kan (3) skrivas:

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Det återstår att beräkna elementen $m_{ij}$ i massmatrisen. Eftersom

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1/3-x}{1/3-0} = 1 - 3x, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ 0, & 1/3 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

fås med $h = 1/3$:

$$m_{00} = \int_0^1 \varphi_0(x)\, \varphi_0(x)\, dx = \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \left[\frac{x}{h} = y; \quad dx = h\, dy; \quad \begin{matrix} x = 0 \leftrightarrow y = 0, \\ x = h \leftrightarrow y = 1. \end{matrix}\right]$$

$$= h \int_0^1 (1-y)^2\, dy = h \left[-\frac{(1-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = h/3.$$

Av symmetriskäl blir också $m_{33} = h/3$ och $m_{11} = m_{22} = 2h/3$. Eftersom $\varphi_1(x) = 3x$ för $0 \leq x \leq 1/3$ enligt Problem 1(b) fås vidare med $h = 1/3$:

$$m_{10} = \int_0^1 \varphi_0(x)\, \varphi_1(x)\, dx = \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right) \frac{x}{h}\, dx = \left[\frac{x}{h} = y; \quad dx = h\, dy; \quad \begin{matrix} x = 0 \leftrightarrow y = 0, \\ x = h \leftrightarrow y = 1. \end{matrix}\right]$$

$$= h \int_0^1 \overbrace{(1-y)\, y}^{y - y^2}\, dy = h \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = h/6.$$

Av symmetriskäl blir också $m_{01} = m_{21} = m_{12} = m_{32} = m_{23} = h/6$. Övriga matriselement blir lika med 0 eftersom i dessa fall $\varphi_i$ och $\varphi_j$ aldrig är skilda från 0 samtidigt.
(c)

$$b_0 = \int_0^1 (x+1)\,\varphi_0(x)\,dx = \int_0^{1/3} \underbrace{(x+1)\,\overbrace{\varphi_0(x)}^{1-3x}}_{f_1(x)}\,dx = \frac{f_1(0) + 4f_1(\frac{1}{6}) + f_1(\frac{1}{3})}{6} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot 0}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1 + \frac{7}{3}}{18} = \frac{10}{54} = \frac{5}{27};$$

$$b_1 = \int_0^1 (x+1)\,\varphi_1(x)\,dx = \int_0^{1/3} \underbrace{(x+1)\,\overbrace{\varphi_1(x)}^{3x}}_{f_2(x)}\,dx + \int_{1/3}^{2/3} \underbrace{(x+1)\,\overbrace{\varphi_1(x)}^{2-3x}}_{f_3(x)}\,dx$$
$$= \frac{f_2(0) + 4f_2(\frac{1}{6}) + f_2(\frac{1}{3})}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{f_3(\frac{1}{3}) + 4f_3(\frac{1}{2}) + f_3(\frac{2}{3})}{6} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot 1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3} \cdot 1 + 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{3} \cdot 0}{6} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{\frac{7}{3} + \frac{4}{3}}{18} + \frac{\frac{4}{3} + 3}{18} = \frac{11}{54} + \frac{13}{54} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}.$$

**Problem 4.**
(a) Integrera två gånger:

$$u''(x) = -x^3 - 1$$
$$u'(x) = -\frac{x^4}{4} - x + C_1$$
$$u(x) = -\frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Utnyttja randvillkoren för att bestämma integrationskonstanterna:

$$0 = u(0) = C_2 \qquad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$
$$0 = u(1) = -\frac{1}{20} - \frac{1}{2} + C_1 + C_2 \qquad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{11}{20}$$

Alltså fås:

$$u(x) = -\frac{x^5}{20} - \frac{x^2}{2} + \frac{11x}{20}$$

(b) Givet en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av intervallet $I = [0,\,1]$ i $N$ stycken delintervall med mesh-funktion $h = h(x)$:

Finn $U \in V_{h0}$ s.a.

$$\int_0^1 U'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \text{för alla } v \in V_{h0},$$

där $V_{h0}$ är vektorrummet av styckvis linjära, kontinuerliga funktioner $v = v(x)$ s.a. $v(0) = v(1) = 0$.
*Kommentar:* Eftersom $\varphi_0$ och $\varphi_N$ inte ingår i basen för $V_{h0}$ är dimensionen av $V_{h0}$ lika med $N-1$.
(c) $\|v\|_{L^2(I)} := \left(\int_0^1 v(x)^2\,dx\right)^{1/2}$
(d) $\|u' - U'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u' - v'\|_{L^2(0,1)}$ för alla $v \in V_{h0}$.
Väljes speciellt $v = \pi_h u$ fås från interpolationsfeluppskattning:

$$\|u' - U'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u' - (\pi_h u)'\|_{L^2(0,1)} \leq C_i\,\|hu''\|_{L^2(0,1)}$$

*Kommentar:* Eftersom i detta fall $-u'' = f$ så är $\|hu''\|_{L^2(0,1)} = \|hf\|_{L^2(0,1)}$ och därmed

$$\|u' - U'\|_{L^2(0,1)} \leq C_i\,\|hf\|_{L^2(0,1)}$$