Deltentamen 2002-09-25

TMA205: Differentialekvationer och tekniska beräkningar, del A, för Kb2.

13.15 – 15.00. Inga hjälpmedel. Totalt 30p.

V_h betecknar vektorrummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på en indelning $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ av intervallet $I = [0,\, 1]$ i N stycken delintervall.

Problem 1. (a) Betrakta fallet $N = 3$ med $x_1 = 1/3$ och $x_2 = 1/2$. Rita basfunktionerna (hattfunktionerna) φ_j, $j = 0, 1, 2, 3$ i en figur. (1p)
(b) Skriv upp det analytiska uttrycket för φ_1. (1p)
(c) Ange hur en funktion i V_h representeras i termer av basfunktioner. (1p)
(d) Vilka är basfunktionerna i rummet $V_h^0 = \{v \in V_h : v(0) = v(1) = 0\}$? (1p)

Problem 2. Låt $g : I \to \boldsymbol{R}$ vara en given funktion.
(a) Definiera interpolanten $\pi_h g \in V_h$ av g, och skriv $\pi_h g$ som en linjärkombination av hatt-funktioner. (1p)
(b) Betrakta ånyo fallet $N = 3$ med indelning av I som i Problem 1(b). Låt $g(x) = x(1-x)$. Rita g, $\pi_h g$, $g - \pi_h g$ i samma figur. (2p)
(c) Definiera $L_\infty(I)$-normen $\|v\|_{L_\infty(I)}$ av en funktion v definierad på intervallet I och beräkna $\|v\|_{L_\infty(I)}$ då $v = x(x-1)$. (1p)
(d) *Formulera* en uppskattning av interpolationsfelet $\|(g - \pi_h g)'\|_{L_\infty(I)}$. (2p)

Problem 3. (a) Antag att $N = 3$ med $x_1 = 1/3$ och $x_2 = 2/3$, d.v.s. en likformig indelning. Beräkna L^2-projektionen $P_h g$ av funktionen $g = x(1-x)$ på rummet $V_h^0 = \{v \in V_h : v(0) = v(1) = 0\}$. (5p)
(b) Bevisa feluppskattningen

$$\|g - P_h g\|_{L^2(I)} \le \|g - v\|_{L^2(I)} \quad \text{för all } v \in V_h \qquad (4\text{p}). \tag{1}$$

(c) Låt $w = x^5$ och beräkna $\|w\|_{L^2(I)}$. (1p)

Problem 4. Betrakta differentialekvationen

$$-((1+x)u')'(x) + xu(x) = f(x) \quad \text{i } (0,\, 1), \tag{2}$$

med randvillkoren

$$u(0) = 2u'(1) = 0. \tag{3}$$

(a) Uppfyller funktionen $u(x) = x(1-x)^2$ randvilkoren (3) ? (Motivera ditt svar) (2p)
(b) Bestäm f så att u (från 4a) uppfyller (2). (2p)
(c) I ditt program använder du randvilkoren

$$u'(0) = \gamma(0)(u(0) - g_D(0)) + g_N(0), \tag{4}$$

$$-u'(1) = \gamma(1)(u(1) - g_D(1)) + g_N(1). \tag{5}$$

Ange hur du väljer γ, g_D, samt g_N för $x = 0, 1$ i (4-5) för att implementera randvilkoren (3). (2p)

Problem 5. Betrakta den ordinära differential ekvationen: finn $u : (0, T) \to \mathbf{R}$ så att

$$\dot{u} + a(t)u = b(t), \tag{6}$$

$$u(0) = u_0, \tag{7}$$

Antag att $T = 1$, $u_0 = 1$, $a(t) = 1 + t$ och $b(t) = 1$. Beräkna en approximation till $u(T)$ med hjälp av *bakåt Euler* genom att dela $(0, T)$ i två lika långa interval. (4p)