Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C, 2003–04

Telefon:
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Betygsgränser: 3: 25–33p, 4: 34–42p, 5: 43–50. På uppgift 1 krävs minst 5 poäng.

1. (a) Skriv en matlab/octave funktionsfil som implementerar funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, & \text{om } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Hitta på några bra test-exempel.

(b) Programmet `my_ode.m` är:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
a=int(1); b=int(2);
i=1; t(1)=a; U(:,1)=ua;
while t(i)<b
  i=i+1; t(i)=t(i-1)+h;
  U(:,i)=U(:,i-1)+h*feval(f, t(i-1), U(:,i-1));
end
U=U'; t=t';
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
   function y=funk(t,x)
   A=[0 1;-1 0]; y=A*x;
```

Redovisa alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> f='funk', I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode(f,I,u0,h);
```

2. Bestäm lösningen $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ för $t > 0$ till problemet:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_1(t) \end{cases},$$

med begynnelsedata $u(0) = (1, 2)$.

3. (a) Definiera/beskriv vad som menas med nivåkurva Γ_c till en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

(b) Visa att gradienten ∇f är ortogonal mot Γ_c.

(c) Illustrera detta genom att räkna igenom exemplet $x_1^2 + x_2^2 = 9$. Dvs parametrisera kurvan, räkna ut tangent och gradient.

4. Undersök funktionen

$$f(x_1, x_2) = \tfrac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 + 8$$

med avseende på lokala maxima, minima och sadelpunkter.

5. Betrakta ytan S som ges av parametriseringen $g(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), 2\cos(v))$, där $u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi/2]$.

(a) Beskriv S geometriskt.

(b) Beräkna volymen av området mellan S och planet $x_3 = 0$.

(c) Beräkna flödesintegralen

$$\int_S B \cdot n \, ds,$$

då $B(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2, x_1 x_3, -2x_1 x_2 x_3)$ och normalen n har positiv x_3-komponent.

/stig

Lösningar

1. (a)

```
function y=funk(x)
r=x(1)^2+x(2)^2;
y=0;
if r<1
  y=sqrt(1-r);
end
```

Test: $f([1;1]) = 0,\ f([0;0]) = 1,\ f([0;.5]) = \sqrt{3}/2$.
(b)

$a = 0,\ b = 0.1$

$i = 1,\ t(1) = 0,\ U(;,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

test: $t(1) < 0.1$ ja

$i = 2,\ t(2) = 0.1,\ U(;,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$

nu har vi $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

test: $t(2) < 0.1$ nej

$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix},\ t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Svaret blir $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$.

2. Se förra årets tenta.

3. (a, b) Se förra årets tenta.
(c) Parametrisering $x = g(t)$ ges av

$$\begin{cases} x_1 = 3\cos(t), \\ x_2 = 3\sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Tangenten: $g'(t) = \begin{bmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$. Gradienten $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$. Vi ser genast att de är ortogonala: $\nabla f(x(t))g'(t) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = 0$.

4. Stationära punkter till funktionen $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 7x_1 + 8$ ges av ekvationssystemet

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1, x_2) &= x_1^2 - 4x_2 + 7 = 0, \\ f'_{x_2}(x_1, x_2) &= 2x_2 - 4x_1 = 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $2x_1 = x_2$. Den första ekvationen ger sedan $x_1^2 - 8x_1 + 7 = 0$ med lösningarna $x_1 = 1$ och $x_1 = 7$, vilka ger $x_2 = 2$ respektive $x_2 = 14$. Vi har alltså två stationära punkter nämligen $(1, 2)$ och $(7, 14)$. Hessematrisen är

$$f''(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

I punkten $(1, 2)$ får vi

$$f''(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = 6 > 0$, dvs matrisen är indefinit. Vi drar slutsatsen att $(1, 2)$ är en sadelpunkt. I punkten $(7, 14)$ får vi

$$f''(7,14) = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_{1,2} = 8 \pm \sqrt{52} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(7, 14)$ är en minimipunkt.

5. Se förra årets tenta.

`/stig`