Matematik/Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C, 2004–08–28

Telefon: Axel Målqvist 0739 77 92 68 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–50. På uppgift 1 krävs minst 5 poäng (gäller ej inskrivna 2002 och tidigare).

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

---

1. (a) Skriv en matlab/octave funktionsfil som implementerar funktionen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^3.$$

Hitta på ett bra test-exempel. Tips: `length(x)` ger antalet komponenter i vektorn `x`.

(b) Programmet `my_quad2D.m` är:

```
function q = my_quad2D(f, a, b, c, d, h)
N = ceil((b-a)/h);
M = ceil((d-c)/h);
q = 0;

for i = 1:N                          % loop över samtliga delintervall - x-led
  for j = 1:M                        % loop över samtliga delintervall - y-led
    x1i = a + i*h;                   % delkvadratens högra ändpunkt
    x2j = c + j*h;                   % delkvadratens övre ändpunkt
    q = q + feval(f, x1i, x2j)*h*h; % ‘‘right-hand rectangle rule’’
  end
end
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(x)
y = 1;
```

Redovisa alla beräkningar som programmet gör efter följande:

```
>> f='funk'; h=0.5; a=0; b=1; c=0; d=1;
>> s = my_quad2D(f, a, b, c, d, h)
```

2. Bestäm lokala maxima och minima för funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$.

3. Låt $F(x) = [3x_1^2x_2^4, 4x_1^3x_2^3]$.

(a) Beräkna rotationen av F.

(b) Bestäm en potential till vektorfältet F.

(c) Beräkna tangentlinjeintegralen $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot ds$, där Γ är räta linjen från origo till punkten $x = [1, 1]$.

4. Cylindriska koordinater ρ, θ, z definieras av

$$x_1 = \rho\cos(\theta)$$
$$x_2 = \rho\sin(\theta)$$
$$x_3 = z$$

(a) Bestäm volymselementet $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$ i cylindriska koordinater. Använd sedan detta för att beräkna volymen av cylindern $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$, $0 \leq x_3 \leq 10$.
(b) Parametrisera cylinderytan $x_1^2 + x_2^2 = 9$, $0 \leq x_3 \leq 10$ med hjälp av cylindriska koordinater. Bestäm areaelementet och använd detta för att beräkna ytans area.

Vänd!

5. (a) Visa att för $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gäller

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma u n_i \, ds, \quad i = 1, 2,$$

där $Q = [0,1] \times [0,1]$ med rand Γ och utåtriktad enhetsnormal n.
(b) Använd detta för att visa att för $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gäller

$$\int_Q \nabla \cdot u \, dx = \int_\Gamma u \cdot n \, ds.$$

`/stig`

TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C, 2004–08–28. Lösningar.

---

1. (a)

```
function y=funk(x)
  n=length(x);
  y=0;
  for j=1:n
    y=y+x(j)^3;
  end
```

Kompaktare program:

```
function y=funk(x)
  y=sum(x.^3);
```

Test: $f([1,2]) = 9$, kommandoraden `>> funk([1,2])` bör ge resultatet `ans=9`.

(b)

$$
\begin{aligned}
&N = 2,\ M = 2,\ q = 0,\\
&i = 1,\ j = 1,\ x_{1i} = 0.5,\ x_{2j} = 0.5,\ q = 0 + f(0.5, 0.5) \times 0.25 = 0.25\\
&j = 2,\ x_{1i} = 0.5,\ x_{2j} = 1,\ q = 0.25 + f(0.5, 1) \times 0.25 = 0.5\\
&i = 2,\ j = 1,\ x_{1i} = 1,\ x_{2j} = 0.5,\ q = 0.5 + f(1, 0.5) \times 0.25 = 0.75\\
&i = 2,\ j = 2,\ x_{1i} = 1,\ x_{2j} = 1,\ q = 0.75 + f(1, 1) \times 0.25 = 1
\end{aligned}
$$

Slutligen blir svaret $s = 1$.

2. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$ ges av ekvationssystemet $f'(x, y) = 0$, dvs

$$
\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= 8x - 4y + 3 = 0\\
f'_y(x, y) &= 6y - 4x = 0
\end{aligned}
$$

med den enda lösningen $x = -\frac{9}{16}$, $y = -\frac{3}{8}$. Vi har alltså en unik extrempunkt nämligen $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$. Hessematrisen är $f''(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_\pm = 7 \pm \sqrt{17} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$ är en minimipunkt. Eftersom det inte finns några andra extrempunkter, så är det ett globalt minimum.

3. (a) rot $F = \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} = 12x_1^2x_2^3 - 12x_1^2x_2^3 = 0.$

(b) Att rotationen är noll medför att det finns en potential. Potentialen ϕ ges av grad $\phi = F$ dvs

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= F_1 = 3x_1^2x_2^4,\\
\frac{\partial \phi}{\partial x_2} &= F_2 = 4x_1^3x_2^3.
\end{aligned}
$$

Den första ekvationen ger

$$\phi(x) = x_1^3x_2^4 + f(x_2).$$

Den andra ekvationen ger

$$\phi(x) = x_1^3x_2^4 + g(x_1).$$

Dessa måste stämma överens, vilket ger att $f(x_2) = g(x_1)$ för alla x, dvs $f = g =$ konstant $= C$. Alltså:

$$\phi(x) = x_1^3 x_2^4 + C.$$

(c) Eftersom integranden har en potential får vi

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \phi(1,1) - \phi(0,0) = 1.$$

4. (a) För cylinderkoordinater $x = g(\rho, \theta, z)$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos(\theta) \\ x_2 &= \rho\sin(\theta) \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

blir Jacobianen

$$g'(\rho,\theta,z) = \left[g'_\rho, g'_\theta, g'_z\right] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volymselementet: $dx = |\det(g'(\rho,\theta,z))|\, d\rho\, d\theta\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$ och cylinderns volym

$$\int_\Omega dx = \int_{z=0}^{10}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{3} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^{10} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho\, d\rho = 10 \times 2\pi \times \frac{9}{2} = 90\pi.$$

(b) På mantelytan S:

$$\begin{cases} x_1 = 3\cos(\theta), \\ x_2 = 3\sin(\theta), & \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, 10]. \\ x_3 = z, \end{cases}$$

Jacobianen är

$$g'(\theta, z) = \left[g'_\theta, g'_z\right] = \begin{bmatrix} -3\sin(\theta) & 0 \\ 3\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En normalvektor:

$$g'_\theta \times g'_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3\sin(\theta) & 3\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cos(\theta) \\ 3\sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

och areaelementet $ds = \|g'_\theta \times g'_z\|\, d\theta\, dz = 3 d\theta\, dz$. Arean blir $\int_S ds = \int_{z=0}^{10}\int_{\theta=0}^{2\pi} 3\, d\theta\, dz = 10 \times 2\pi \times 3 = 60\pi$.

5. Se boken.

`/stig`