Matematik Chalmers

**Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, övningstentamen 2003**
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet (mer eller mindre direkt från de obligatoriska veckouppgifterna) och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

**1.** (vecka 1) Formulera fundamentalsatsen.

**2.** (vecka 2) Skriv ned ett exempel som är lämpligt för att testa programmet `my_int`. Ange alla detaljer: lösningsformel, MATLAB/OCTAVE-kommando, graf, med mera.

**3.** (vecka 2) Add the missing parts of the following program (marked by `??`):

```
function [x,U]=my_int(f,I,ua,h)
% my_int - solves the initial value problem u'(x)=f(x), u(a)=ua
%
%   Syntax:
%           [x,U]=my_int(f,I,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file,
%                 for example, f='funk'
%           I   - 1x2 matrix, specifying an interval I=[a b]
%           ua  - real number, the  initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           x -  a vector, the set of nodes x(i)
%           U -  a vector, U(i) is the approximate solution at
%                the point x(i)
%   Description:
%           The program computes an approximate solution of the initial
%           value problem  u'(x)=f(x), a<x<b; u(a)=ua, according to
%           the algorithm in the Fundamental Theorem of Calculus.

a=I(1);
b=I(2);
??
x(i)=a;
U(i)=ua;
while x(i)<b
  i=i+1;
  x(i)=??
  U(i)=??
end
x=x';
U=U';
```

**4.** (vecka 4) Beräkna integralen $\int_0^2 x\sin(x)\,dx$.

**5.** (vecka 6) Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

**6.** (vecka 3) Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem for general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax:
%           [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%           f   - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-1 0];
y=A*x;
```

Vi skriver följande på MATLAB/OCTAVEs kommandorad:

```
>> [t,U]=my_ode('funk', [0, 6], [0;1], .01); plot(t,U)
```

Vilket begynnelsevärdesproblem löser vi? Uttryck lösningen analytiskt. Rita vad man ser i figuren.

**7.** (vecka 5) Lös begynnelsevärdesproblemet ($b$ är en konstant) $\begin{cases} u'(t) + 3u(t) = b, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

**8.** (vecka 3) Correct the error in the following:

```
>> f=funk3; h=0.1; I=[0, 1]; u0=0;
>> [x,U]=my_ode(f,I,u0,h);
```

**9.** (vecka 5) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = u(t)^2, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

**10.** The file `my_trig.m` is:

```
function [t,W]=my_trig(int,w0,h)
% my_trig - solves initial value problem for the system of
%          ordinary differential equations w'=Aw, A=[0 1;-1 0]
%   Syntax:
%           [t,W]=my_trig(int,w0,h)
%   Arguments:
%           int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%           w0  - 2x1 matrix specifying an initial value
%           h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%           t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%           W - nx2 matrix containing the approximate solution
%   Description:
%           The program computes an approximate solution of the intial
%           value problem  w'=Aw, a<t<b; w(a)=w0, A=[0 1;-1 0].  Here w
```

```
%           and w0 are column vectors of dimension 2x1.

a=int(1);
b=int(2);
A=[0 1;-1 0];
i=1;
t(1)=a;
W(:,1)=w0;
while t(i)<b
  i=i+1;
  t(i)=t(i-1)+h;
  W(:,i)=W(:,i-1)+h*A*W(:,i-1);
end
t=t';
W=W';
```

What are the values of `x` and `U` after the following:

```
>> I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[0;1];
>> [x,U]=my_trig(I,u0,h);
```

---

**11.** Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck $b$ som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är $A$ singulär?

(e) Visa att funktionen $f(x) = Ax$ är en linjär funktion av typen $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$.

**12.** (a) Visa hur man skriver om differentialekvationen $u'' = -\sin(u) - (u')^2$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ som ett system av två ekvationer av första ordningen:

$$\begin{cases} w' = f(w), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ -\sin(w_1) - w_2^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $f(w) = 0$.

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$. Beräkna linjäriseringen av $f$ i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Genomför ett steg av Newtons metod för $f(w) = 0$ med startvektor $\bar{w} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$.

**13.** Betrakta det allmänna begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) = u_a. \end{cases}$$

(a) Skriv ned Eulers metod för approximativ beräkning av lösningen.

(b) Skriv ned mittpunktsmetoden för approximativ beräkning av lösningen.

(c) Mittpunktsmetoden kallas "implicit". Vad menas med detta? Hur kan man implementera denna metod i MATLAB/OCTAVE?

/stig