TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999–12–18.
Lösningar.

---

1. (a)

$$\int_0^x t\cos(5t)\,dt = \tfrac{1}{5}\Big[t\sin(5t)\Big]_0^x - \tfrac{1}{5}\int_0^x \sin(5t)\,dt = \tfrac{1}{5}x\sin(5x) + \tfrac{1}{25}\Big[\cos(5t)\Big]_0^x$$
$$= \tfrac{1}{5}x\sin(5x) + \tfrac{1}{25}\cos(5x) - \tfrac{1}{25}.$$

(b)

$$\int_0^x \big(1+\sin^2(t)\big)\cos(t)\,dt = \left\{\begin{array}{c} y=\sin(t) \\ dy=\cos(t)\,dt \end{array}\right\} = \int_0^{\sin(x)} \big(1+y^2\big)\,dy$$
$$= \Big[y + \tfrac{1}{3}y^3\Big]_0^{\sin(x)} = \sin(x) + \tfrac{1}{3}\sin^3(x).$$

(c) Låt $x > y$. Då fås

$$|f(x)-f(y)| = \Big|\int_y^x \frac{dt}{1+\sin^4(t)}\Big| = \int_y^x \frac{dt}{1+\sin^4(t)} \le \int_y^x dt = x-y = |x-y|.$$

Genom att låta x och y byta plats inser vi att $|f(x)-f(y)| \le |x-y|$ för alla x, y. Vi drar slutsatsen att $L_f \le 1$.

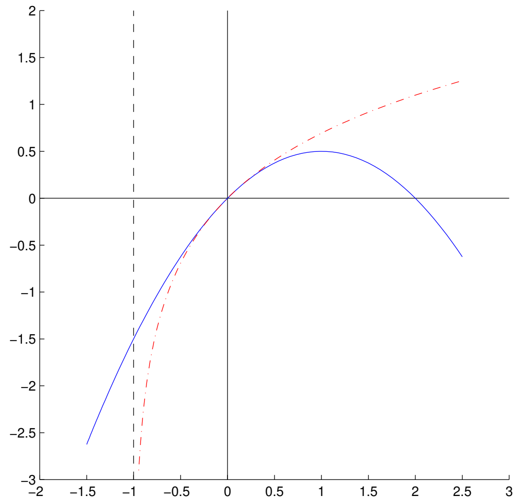
2. (a) Vi beräknar derivatorna:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1,\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

Taylors formel är $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\hat{x})x^3$, dvs

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + R_2(x), \quad R_2(x) = \tfrac{1}{3}\frac{1}{(1+\hat{x})^3}x^3,$$

där $\hat{x}$ är en punkt mellan 0 och x. Se figuren.



FIGUR 1. $\log(1+x)$ $(-\cdot-)$ och $x-\frac{1}{2}x^2$ $(-)$

(b) Vi uppskattar resttermen:

$$|R_2(x)| = \tfrac{1}{3}\frac{1}{(1+\hat{x})^3}|x|^3, \quad x > -1.$$

För $\hat{x} \geq 0$ gäller $1/(1+\hat{x})^3 \leq 1$, så att

$$|R_2(x)| \leq \tfrac{1}{3}|x|^3, \quad 0 < x < 1,$$

dvs $C = \frac{1}{3}$. Å andra sidan kan $1/(1+\hat{x})^3$ bli hur stor som helst på intervallet $-1 < \hat{x} < 1$ och det finns därför ingen konstant C, sådan att den önskade olikheten gäller på intervallet $-1 < x < 1$.

(c) $\log(1.1) \approx 0.1 - \frac{1}{2}0.01 = 0.095$, felet är $|R_2(0.1)| \leq \frac{1}{3}10^{-3} < 10^{-3}$.

3. (a) Ekvationen är $(D^2-2D+17)u = 0$. Karakteristiska ekvationen är $r^2-2r+17 = 0$ med rötterna $r_1 = 1+4i$, $r_2 = 1-4i$. Lösningen blir

$$\begin{aligned} u(t) &= e^t\big(A\cos 4t + B\sin 4t\big), \\ u'(t) &= e^t\big(A\cos 4t + B\sin 4t\big) + 4e^t\big(-A\sin 4t + B\cos 4t\big). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A, \\ u_1 &= u'(0) = A + 4B, \end{aligned}$$

dvs $A = u_0$, $B = \frac{1}{4}(u_1-u_0)$. Således

$$u(t) = e^t\big(u_0\cos 4t + \tfrac{1}{4}(u_0-u_1)\sin 4t\big).$$

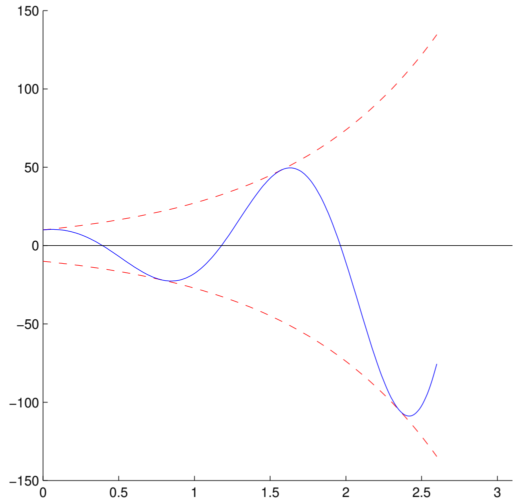
(b) Med $u_0 = u_1$ fås

$$|u(t)| = e^t|u_0|\,|\cos 4t| \leq e^T|u_0| \quad \text{för } 0 \leq t \leq T.$$

Alltså

$$\max_{0\leq t\leq T}|u(t)| \leq e^T|u_0|.$$

Se figuren.



FIGUR 2. $u(t) = u_0 e^t \cos 4t$

(c) Man skriver differentialekvationen som ett system av första ordningen: $v_1 = u$, $v_2 = u'$ och

$$v' = Av, \; v(0) = v_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Sedan använder man en numerisk metod, t ex, framåt Euler:

$$\begin{aligned} &U(0) = v_0, \\ &U(t_i) = U(t_{i-1}) + h_i A U(t_{i-1}) = (I + h_i A) U(t_{i-1}). \end{aligned}$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
yprime=[0 1; -17 2]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],[1;2],.01);
```

där `[0;10]` anger ett tidsintervall, `[1;2]` är begynnelsevärdena och `.01` är steglängden.

4. —

5. (a) Ekvationen $f(x) = 0$ betyder

$$\begin{aligned} -2(x_1 - 1) + x_2 e^{x_1} &= 0, \\ -2x_2 - x_2 e^{x_1} &= 0. \end{aligned}$$

Den andra ekvationen ger $x_2 = 0$, den första ger sedan $x_1 = 1$. Det finns alltså en enda lösning $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobimatrisen är

$$f'(x) = \begin{bmatrix} -2 + x_2 e^{x_1} & e^{x_1} \\ -x_2 e^{x_1} & -2 - e^{x_1} \end{bmatrix}.$$

(c) Första steget i Newtons metod:

evaluera: $A = f'(x^{(0)}) = f'(0,1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$b = -f(x^{(0)}) = -f(0,1) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

lös ekvationssystemet $Ah = b$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\quad h = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$

uppdatera: $x^{(1)} = x^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}$

vi kom lite närmare $\bar{x}$!

(d) "Inversa funktionssatsen": om (i) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ är deriverbar, (ii) $f(\bar{x}) = \bar{y}$, (iii) $f'(\bar{x})$ är inverterbar, så har ekvationen $f(x) = y$ en unik lösning x nära $\bar{x}$ för varje y nära $\bar{y}$, dvs inversa funktionen $x = f^{-1}(y)$ är definierad för alla y nära $\bar{y}$.

I vårt fall har vi $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -2 & e \\ 0 & -2-e \end{bmatrix}$ med $\det(f'(\bar{x})) = 2(2+e) \neq 0$. Förutsättningarna (i), (ii), (iii) är alltså uppfyllda.

Beviset av inversa funktionssatsen bygger på (kvasi-Newton) iterationen

$$
\begin{aligned}
&x^{(0)} = \bar{x} \\
&\text{för } k = 0, 1, 2, \dots \\
&f'(\bar{x})h^{(k)} = -\big(f(x^{(k)}) - y\big) \\
&x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)}
\end{aligned}
$$

dvs

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f'(\bar{x})^{-1}\big(f(x^{(k)}) - y\big).$$

/stig