Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 1999–12–18, f HC**

Telefon: Stig Larsson 070 655 3452, Ola Helenius 0740–459022
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida (förhoppningsvis) före jul.

**1.** (a) Beräkna

$$\int_0^x t\cos(5t)\,dt.$$

(b) Beräkna

$$\int_0^x \big(1+\sin^2(t)\big)\cos(t)\,dt.$$

(c) Låt

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+\sin^4(t)}.$$

Bestäm en Lipschitzkonstant för $f$.

**2.** (a) Skriv ned Taylors formel av ordning 2 i punkten 0 för funktionen $f(x)=\log(1+x)$. Illustrera med en figur på intervallet $-1<x<1$. (Med ordning 2 menar jag att Taylorpolynomet är av grad högst 2. Resttermen betecknas $R_2(x)$.)

(b) Bestäm en konstant $C$ sådan att olikheten $|R_2(x)|\le C|x|^3$ gäller på intervallet $0<x<1$. Och på intervallet $-1<x<1$?

(c) Använd detta för att beräkna en approximation till $\log(1.1)$. Ge en uppskattning av felet.

**3.** (a) Lös (analytiskt) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned}&u''-2u'+17u=0,\quad t>0,\\ &u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1.\end{aligned}$$

(b) Antag att $u_0=u_1$. Rita grafen till $u$. Visa att $\max\limits_{0\le t\le T}|u(t)|\le e^T|u_0|$.

(c) Beskriv en metod för numerisk lösning av begynnelsevärdesproblemet.

(d) Beskriv hur man går tillväga för att lösa begynnelsevärdesproblemet med hjälp av det matlab-program som du själv skrivit.

**4.** Formulera integralkalkylens fundamentalsats. Ange de olika stegen i beviset (utan detaljer).

**5.** (a) Låt $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ definieras av

$$f(x)=\begin{bmatrix}-2(x_1-1)+x_2e^{x_1}\\ -2x_2-x_2e^{x_1}\end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(x)=0$.

(b) Beräkna $f'(x)$.

(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(x)=0$ med startvektor $x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

(d) Vilken sats garanterar att ekvationen $f(x)=y$ har en unik lösning för alla $y$ nära 0? Kontrollera att satsens förutsättningar är uppfyllda. Skriv ned den iteration som används i beviset av satsen.

/stig