Tentamen i TMV035+TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–08–24

Telefon: Leonid Gershuni 0739 779268 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

1. Formulera fundamentalsatsen.

2. Skriv ned ett exempel som är lämpligt för att testa programmet `my_ode`. Ange alla detaljer: lösningsformel, MATLAB-kommando, graf, med mera.

3. Beräkna integralen $\int_1^x \log(t)\,dt$.

4. Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax: [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments: f   - string containing the name of a function file
%              int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%              ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%              h   - positive number, the stepsize
%   Returns:  t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%             U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;1 0];
y=A*x;
```

Vilka värden har `x` och `U` efter följande:

```
>> f='funk', I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode(f,I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet (a, b är en konstanter) $\begin{cases} u'(t)+au(t)=b, \\ u(0)=u_0. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) - k^2u(t) = 0, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = -4u(t)^3, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

10. Välj en passande beteckning till var och en av dessa ekvationer. Använd följande beteckningar: *Icke-linjär. Linjär homogen. Linjär inhomogen.*

1. $u' + 3u = 5$ 2. $u' + 3u = 0$ 3. $u' + 3u^2 = 0$ 4. $u'' + uu' + 2u = 0$ 5. $u'' + 2u' + u = \sin(t)$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär? Är kolonnerna i A linjärt oberoende?

(e) Visa att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) Visa hur man skriver om differentialekvationen $u'' = u^3 - u - (u')^2$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ som ett system av två ekvationer av första ordningen:

$$\begin{cases} w' = f(w), \\ w(0) = w_0, \end{cases} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet $f(w) = 0$.

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$. Beräkna linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Genomför ett steg av Newtons metod för $f(w) = 0$ med startvektor $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. (a) Skriv ned det begynnelsevärdesprobem som vi använder för att definiera exponentialfunktionen $\exp(x)$.

(b) Skriv ned den algoritm som vi använder för att kunstruera exponentialfunktionen.

(c) Använd definitionen i (a) för att visa att logaritmen är exponentialfunktionens invers.

(d) Hur definierar vi funktionen a^x? För vilka a kan vi göra detta?

(e) Skriv ned baklänges Euler-metoden (höger ändpunktsmetoden) för begynnelsevärdesproblemet i (a). Visa att denna leder till $U(x_i) = (1 - h)^{-i}U(x_0)$.

/stig

TMV035+TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–08–24.
Lösningar.

---

1. Se boken.

2.

$$u'(x) = cu(x), \quad x \in [a,b] \tag{1}$$
$$u(a) = u_a$$

Lösningsformel:

$$u(x) = u_a \exp(c(x-a)) \tag{2}$$

MATLAB funktionsfil:

```
function y=funk1(x,u)
c=2;
y=c*u;
```

MATLAB kommando:

```
>> a=1, b=2, ua=3
>> [x,U]=my_ode('funk1',[a, b],ua,1e-2);  plot(x,U)
```

3. $\displaystyle\int_1^x \log(y)\,dy = \int_1^x 1\log(y)\,dy = \Big[y\log(y)\Big]_1^x - \int_1^x y\frac{1}{y}\,dy = x\log(x) - x + 1.$

4. $\pi/4$.

5. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

6. `x=[0; 0.1]`, `U=[1 0; 1 0.1]`

7. $u(t) = u_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} b\,ds = u_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) = (u_0 - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a}$

8. $u(t) = u_0 \cosh(kt) + \frac{u_1}{k}\sinh(kt)$

9. $u(t) = \frac{u_0}{\left(1+8u_0^2 t\right)^{1/2}}$

10. 1. linjär inhomogen. 2. linjär homogen. 3. icke-linjär. 4. icke-linjär. 5. linjär inhomogen.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till radreducerad trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 + 2x_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Variabeln x_3 är fri: $x_3 = s$. De andra äro bundna: $x_2 = \frac{1}{3} - 2s$, $x_1 = -\frac{1}{3} + s$, så att lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pivotkolonnerna, dvs kolonn nr 1 och 2, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1 och 2 i A en bas för $R(A)$, dvs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(c) För att uttrycka $b = x_1 a_1 + x_2 a_2$ löser vi ekvationssystemet $[a_1 \ a_2]x = b$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Räkningarna i (a) ger genast $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b = x_1 a_1 + x_2 a_2 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = c \det(\hat{A}) = 0$ och att kolonnerna är linjärt beroende. Då är A singulär.

(e) Antag $u, v \in R(A)$ och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är $u = Ax$, $v = Ay$, så att $\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$. Det betyder att $\alpha u + \beta v \in R(A)$. Detta visar att $R(A)$ är ett linjärt rum. Dessutom har vi $Ax \in \mathbf{R}^3$, så att $R(A) \subset \mathbf{R}^3$. Vi har visat att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) Sätt $w_1 = u$, $w_2 = u'$, så fås

$$\begin{aligned} w_1' &= u' = w_2 \\ w_2' &= u'' = u^3 - u - (u')^2 = w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{aligned}$$

vilket är det önskade systemet

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 \end{bmatrix}, \quad w_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

(b) De stationära lösningarna ges av $f(w) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} w_2 &= 0 \\ w_1^3 - w_1 - w_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $w_2 = 0,\ w_1 = 0, \pm 1$. Dvs vi har tre stationära punkter $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Jacobi-matrisen är

$$f'(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3w_1^2 - 1 & -2w_2 \end{bmatrix}, \quad f'(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ blir

$$\tilde{f}(w) = f(\bar{w}) + f'(\bar{w})(w - \bar{w}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 - 1 \\ w_2 - 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Första steget av Newtons metod:

$$\begin{aligned}
&A = f'(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad b = -f(1,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&h = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \\
&w^{(1)} = w^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

13. (a)

$$\begin{aligned}
u'(x) &= u(x), \quad x \in [0, b] \\
u(0) &= 1
\end{aligned}$$

Lösningen kallas exponentialfunktionen: $u(x) = \exp(x)$.

(b) Den konstrueras av algoritmen

$$\begin{aligned}
&x_0 = 0,\ U(x_0) = 1 \\
&x_i = x_{i-1} + h \\
&U(x_i) = U(x_{i-1}) + hU(x_{i-1})
\end{aligned}$$

(c) Se boken. (d) Se boken.

(e) Baklänges Euler är

$$U(x_i) = U(x_{i-1}) + hU(x_i)$$

Detta leder till

$$\begin{aligned}
&U(x_i) - hU(x_i) = U(x_{i-1}) \\
&(1-h)U(x_i) = U(x_{i-1}) \\
&U(x_i) = \frac{1}{1-h} U(x_{i-1}) = (1-h)^{-1} U(x_{i-1}) = (1-h)^{-2} U(x_{i-2}) = \cdots = (1-h)^{-i} U(x_0)
\end{aligned}$$

`/stig`