Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035+TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–04–17

Telefon: Alexander Herbertsson 0739 779268 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum.

1. Formulera fundamentalsatsen.

2. Skriv ned ett exempel som är lämpligt för att testa programmet `my_ode`. Ange alla detaljer: lösningsformel, MATLAB-kommando, graf, med mera.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\log(1+x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax: [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments: f   - string containing the name of a function file
%              int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%              ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%              h   - positive number, the stepsize
%   Returns:  t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%             U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;1 0];
y=A*x;
```

Vilka värden har `x` och `U` efter följande:

```
>> f='funk', I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode(f,I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet (a, b är en konstanter) $\begin{cases} u'(t)+au(t)=b, \\ u(0)=u_0. \end{cases}$

Vänd!

8. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(t) - k^2u(t) = 0, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1.$

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = -4u(t)^3, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

10. Välj en passande beteckning till var och en av dessa ekvationer. Använd följande beteckningar: *Icke-linjär. Linjär homogen. Linjär inhomogen.*

1. $u' + 3u^2 = 0$ 2. $u' + 3u = 0$ 3. $u' + 3u = 5$ 4. $u'' + 2u' + u = \sin(t)$ 5. $u'' + uu' + 2u = 0$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär? Är kolonnerna i A linjärt oberoende?

(e) Visa att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) Lös differentialekvationen $u'' - u' - 2u = \cos(t)$.

(b) Skriv ovanstående differentialekvation som ett system av två differentialekvationer av första ordningen.

13. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' + 4u = 0, \\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Visa att om u löser (1) så gäller

$$\frac{1}{2}\big(u'(t)^2 + 4u(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u_1^2 + 4u_0^2\big).$$

(b) Entydighet. Använd resultatet i 13a för att visa att (1) har högst en lösning. Varför är det viktigt att veta att lösningen är unik?

(c) Uttryck lösningen till (1) med hjälp av speciella funktioner (såsom log, exp, sin, cos, ...). Det vill säga: lös problemet analytiskt.

(d) Hur löser man (1) med `my_ode`?

(e) Hur definieras funktionen arcsin? Ange dess definitionsmängd och rita dess graf.

`/stig`

TMV035+TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2004–04–17. Lösningar.

---

1. Se boken.

2.

$$u'(x) = cu(x), \quad x \in [a, b] \qquad (2)$$
$$u(a) = u_a$$

Lösningsformel:

$$u(x) = u_a \exp(c(x-a)) \qquad (3)$$

Matlab funktionsfil:

```
function y=funk1(x,u)
c=2;
y=c*u;
```

Matlab kommando:

```
>> a=1, b=2, ua=3
>> [x,U]=my_ode('funk1',[a, b],ua,1e-2);  plot(x,U)
```

3. $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x$.

4. $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx = \left\{t = x^2,\ dt = 2x\,dx\right\} = \frac{1}{2}\int_0^4 e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}(1-e^{-4})$.

5. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

6. `x=[0; 0.1]`, `U=[1 0; 1 0.1]`

7. $u(t) = u_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} b\,ds = u_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at}) = (u_0 - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a}$

8. $u(t) = u_0\cosh(kt) + \frac{u_1}{k}\sinh(kt)$

9. $u(t) = \frac{u_0}{\left(1+8u_0^2 t\right)^{1/2}}$

10. 1. icke-linjär. 2. linjär homogen. 3. linjär inhomogen. 4. linjär inhomogen. 5. icke-linjär.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till radreducerad trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & \mid & -\frac{1}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & \mid & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 + 2x_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Variabeln x_3 är fri: $x_3 = s$. De andra äro bundna: $x_2 = \frac{1}{3} - 2s$, $x_1 = -\frac{1}{3} + s$, så att lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pivotkolonnerna, dvs kolonn nr 1 och 2, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1 och 2 i A en bas för $R(A)$, dvs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(c) För att uttrycka $b = x_1a_1 + x_2a_2$ löser vi ekvationssystemet $[a_1 \ a_2]x = b$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Räkningarna i (a) ger genast $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b = x_1a_1 + x_2a_2 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = c\det(\hat{A}) = 0$ och att kolonnerna är linjärt beroende. Då är A singulär.

(e) Antag $u, v \in R(A)$ och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är $u = Ax$, $v = Ay$, så att $\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$. Det betyder att $\alpha u + \beta v \in R(A)$. Detta visar att $R(A)$ är ett linjärt rum. Dessutom har vi $Ax \in \mathbf{R}^3$, så att $R(A) \subset \mathbf{R}^3$. Vi har visat att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

12. (a) $u'' - u' - 2u = \cos(t)$. Ansats: $u_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ $u(t) = u_h(t) + u_p(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - \frac{3}{10}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t)$.

(b)

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

13. (a) Multiplicera ekvationen med u' så fås

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big((u')^2 + 4u^2\big) = u''u' + 4uu' = 0$$

så att

$$\frac{1}{2}\big(u'(t)^2 + 4u(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u'(0)^2 + 4u(0)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u_1^2 + 4u_0^2\big).$$

(b) Om det finns två lösningar u och v, dvs

$$\begin{aligned} &u'' + 4u = 0, && v'' + 4v = 0,\\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, && v(0) = u_0,\ v'(0) = u_1, \end{aligned}$$

så uppfyller skillnaden $w = u - v$ begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &w'' + 4w = 0,\\ &w(0) = 0,\ w'(0) = . \end{aligned}$$

Resultatet i (a) ger då

$$\frac{1}{2}\big(w'(t)^2 + 4w(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(w_1^2 + w_0^2\big) = 0,$$

dvs $w(t) = 0$ och därmed $u(t) = v(t)$, dvs lösningen är unik. Det är viktigt att veta att lösningen är unik, för det betyder att alla konstruktioner av lösning ger samma resultat.

(c) Lösningen kan uttryckas

$$u(t) = u_0\cos(2t) + \frac{1}{2}u_1\sin(2t).$$

(d) Man skriver en fil `funk.m` som innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-4 0];
y=A*x;
```

Sedan skriver man

```
>>    u0=0; u1=1;
>>    [t,u]=my_ode('funk', [0, 10], [u0;u1], .01); plot(t,u)
```

(e) Se boken.

/stig