TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2003–12–18. Lösningar.

---

1. Se boken.

2.

(1)
$$u'(x) = x^3, \quad x \in [2,5]$$
$$u(2) = 3$$

Lösningsformel:
$$u(x) = 3 + \int_2^x y^3\,dy = 3 + \left[\frac{y^4}{4}\right]_2^x = 3 + \frac{x^4 - 16}{4}$$

MATLAB funktionsfil:

```
function y=funk1(x,u)
y=x^3;
```

MATLAB kommando:

```
>> [x,U]=my_ode('funk1',[2 5],3,1e-2);  plot(x,U)
```

3. $\displaystyle\int_1^t x\log(x)\,dx = \frac{1}{2}t^2\log(t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}.$

4. Partialbråksuppdelning:
$$\frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$
Identifiering av koefficienterna ger $A = 1/8$, $B = -1/8$, så att
$$\frac{1}{(x-5)(x+3)} = \frac{1/8}{x-5} - \frac{1/8}{x+3}$$
Vi får då
$$\int_0^t \frac{1}{(x-5)(x+3)}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^t \frac{1}{x-5}\,dx - \frac{1}{8}\int_0^t \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{8}\Big[\log(|x-5|)\Big]_0^t - \frac{1}{8}\Big[\log(|x+3|)\Big]_0^t$$
$$= \frac{1}{8}\log\Big(\frac{5-t}{5}\Big) - \frac{1}{8}\log\Big(\frac{t+3}{3}\Big) = \frac{1}{8}\log\Big(\frac{3}{5}\cdot\frac{5-t}{t+3}\Big), \quad \text{för } -3 < t < 5$$

5. $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

6. `x=[0; 0.1]`, `U=[1 0; 1 -0.1]`

7. $u(t) = u_0e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}b\,ds = u_0e^{-at} + \frac{b}{a}(1-e^{-at}) = (u_0 - \frac{b}{a})e^{-at} + \frac{b}{a}$

8.

```
function y=iteration(x,n)
% iteration - computes iterated squares
%   Syntax:
%           y=iteration(x,n)
%   Arguments:
%           x - a real number, the initial value
%           n - an integer, the number of iterations
%   Returns:
%           y - nx1 matrix containg the iterated numbers
%   Description:
%           The program computes n steps of the iteration y(i+1)=y(i)^2
%           starting with the initial value x.
y(1)=x;
for i=1:n
  y(i+1)=y(i)^2;
end
y=y';
```

Resultet är `z=[2;4;16;256]`.

Resultatet av `>> help iteration` är

```
% iteration - computes iterated squares
%   Syntax:
%           y=iteration(x,n)
%   Arguments:
%           x - a real number, the initial value
%           n - an integer, the number of iterations
%   Returns:
%           y - nx1 matrix containg the iterated numbers
%   Description:
%           The program computes n steps of the iteration y(i+1)=y(i)^2
%           starting with the initial value x.
```

9. $u(t) = \frac{u_0}{\left(1+2u_0^2 t\right)^{1/2}}$

10. 1 och 2 är linjära.

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 5 & | & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 6 & | & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & | & 1 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 1 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(b) Trappstegsformen visar att kolonnerna i A är linjärt oberoende och därmed en bas för $R(A)$. Den är

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi har enligt (a)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b = Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = \det(\hat{A}) = 1 \cdot (-4) \cdot 2 \cdot (-1) = 8 \neq 0$. (Obs att vi har inte brutit ut några tal.) Då är A icke-singulär.

(e) $f(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

12. (a) MATLAB funktionsfil:

```
function y=funk4(t,u)
a=1; b=1; c=1; d=1;
y=zeros(2,1);
y(1)=-a*u(1)-b*u(1)*exp(u(2));
y(2)=-c*u(2)+d*u(1)*exp(u(2));
```

MATLAB-kommando:

```
>> [t,U]=my_ode('funk4',[0 50],[1;1],1e-2);  plot(t,U), plot(U(:,1),U(:,2))
```

(b) De stationära lösningarna ges av $f(u) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} -au_1 - bu_1 \exp(u_2) &= 0 \\ -cu_2 + du_1 \exp(u_2) &= 0 \end{aligned}$$

Den första ekvationen är $u_1(a + b\exp(u_2)) = 0$ med den unika lösningen $u_1 = 0$ (obs att $a + b\exp(u_2) \neq 0$ eftersom $a, b > 0$). Med $u_1 = 0$ ger den andra ekvationen sedan $u_2 = 0$. Den enda lösningen är alltså $u = (0, 0)$.

(c) Jacobi-matrisen är

$$Df(u) = \begin{bmatrix} -a - be^{u_2} & -bu_1e^{u_2} \\ d & -c + du_1e^{u_2} \end{bmatrix},$$

(d)

$$\begin{array}{lll}
\text{evaluera} & A = Df(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad b = -f(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\text{lös} & Ah = b, \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
& \begin{cases} -2h_1 - h_2 &= 2, \\ h_1 &= -1, \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\text{updatera} & u^{(1)} = u^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\text{bingo!} &
\end{array}$$

13. (a)

$$\begin{aligned} u'(x) &= u(x), \quad x \in [0, b] \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösningen kallas exponentialfunktionen: $u(x) = \exp(x)$.

(b) Den konstrueras av algoritmen

$$\begin{aligned} & x_0 = 0, \ U(x_0) = 1 \\ & x_i = x_{i-1} + h \\ & U(x_i) = U(x_{i-1}) + hU(x_{i-1}) \end{aligned}$$

(c) Se boken. (d) Se boken.

(e) Baklänges Euler är

$$U(x_i) = U(x_{i-1}) + hU(x_i)$$

Detta leder till

$$U(x_i) - hU(x_i) = U(x_{i-1})$$
$$(1-h)U(x_i) = U(x_{i-1})$$
$$U(x_i) = \frac{1}{1-h}U(x_{i-1}) = (1-h)^{-1}U(x_{i-1}) = (1-h)^{-2}U(x_{i-2}) = \cdots = (1-h)^{-i}U(x_0)$$

`/stig`