Matematik Chalmers

Tentamen i TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2003–12–18 f V

Telefon: Erik Broman 0740 459022 (Stig Larsson 0733 409 006)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–10 (totalt 20 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. För godkänt krävs minst 16 poäng från denna avdelning.

På uppgifterna 11–13 (totalt 30 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum i början av januari.

1. Formulera fundamentalsatsen.

2. Skriv ned ett exempel som är lämpligt för att testa programmet `my_int`. Ange alla detaljer: lösningsformel, MATLAB-kommando, graf, med mera.

3. Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^t x\log(x)\,dx$.

4. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(x+3)(x-5)}\,dx$.

5. Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\exp(x)$ i punkten $\bar{x}=0$.

6. Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.
%   Syntax: [t,U]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments: f   - string containing the name of a function file
%              int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%              ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%              h   - positive number, the stepsize
%   Returns:  t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%             U - nxd matrix containing the approximate solution
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-1 0];
y=A*x;
```

Vilka värden har `x` och `U` efter följande:

```
>> f='funk', I=[0 0.1]; h=1e-1; u0=[1;0];
>> [x,U]=my_ode(f,I,u0,h);
```

7. Lös analytiskt begynnelsevärdesproblemet (a, b är en konstanter) $\begin{cases} u'(t)+au(t)=b, \\ u(0)=u_0. \end{cases}$

Vänd!

8. (a) Skriv funktionen iteration enligt följande specifikation. (b) Vad blir resultatet av kommandot `>> z=iteration(2,3)`? (c) Vad blir resultatet av kommandot `>> help iteration`?

```
function y=iteration(x,n)
% iteration - computes iterated squares
%   Syntax: y=iteration(x,n)
%   Arguments: x - a real number, the initial value
%              n - an integer, the number of iterations
%   Returns:   y - nx1 matrix containg the iterated numbers
%   Description:
%          The program computes n steps of the iteration y(i+1)=y(i)^2
%          starting with the initial value x.
```

9. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = -u(t)^3, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

10. Vilka av följande differentialekvationer är linjära?

1. $u' + 3u = 0$ 2. $u' + 3u = 5$ 3. $u' + 3u^2 = 0$ 4. $u'' + uu' + 2u = 0$

---

11. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär?

(e) Vad menas med att funktionen $f(x) = Ax$ är en linjär funktion av typen $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$.

12. (a) Betrakta följande system av ODE:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -au_1(t) - bu_1(t)\exp(u_2(t)) \\ u_2'(t) &= -cu_2(t) + du_1(t)\exp(u_2(t)) \end{aligned}$$

Här är koefficienterna a, b, c, d positiva tal. Beskriv hur man löser dessa ekvationer med de MATLAB-program som du skrivit under kursen. Ange funktionsfil, MATLAB-kommando och så vidare.

(b) Ekvationerna kan skrivas på formen $u' = f(u)$. Bestäm åtminstone en lösning till ekvationssystemet $f(u) = 0$. Hur många finns det?

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(u)$.

(d) Välj värdena $a = b = c = d = 1$. Genomför ett steg av Newtons metod för ekvationssystemet $f(u) = 0$ med startvektor $(1, 0)$.

13. (a) Skriv ned det begynnelsevärdesprobem som vi använder för att definiera exponentialfunktionen $\exp(x)$.

(b) Skriv ned den algoritm som vi använder för att kunstruera exponentialfunktionen.

(c) Använd definitionen i (a) för att visa att logaritmen är exponentialfunktionens invers.

(d) Hur definierar vi funktionen a^x? För vilka a kan vi göra detta?

(e) Skriv ned baklänges Euler-metoden (höger ändpunktsmetoden) för begynnelsevärdesproblemet i (a). Visa att denna leder till $U(x_i) = (1-h)^{-i}U(x_0)$.

/stig