TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Kb, del B, 2001–12–22. Lösningar.

---

1. (a) Se boken.

(b) $\frac{t^2}{2}\log(t) - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}$

(c) $u(x) = 1 + \int_1^x y\log(y)\,dy = \frac{x^2}{2}\log(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}$

(d) $\frac{1}{4}(1-\exp(-16))$

(e) $x - \frac{1}{6}x^3$

2. (a)

$$\begin{cases} u' = -3u, & x \in [0,2] \\ u(0) = 5 \end{cases} \qquad u(x) = 5\exp(-3x)$$

(b) $u(t) = u_0 e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-s)} f(s)\,ds$

(c) $u(t) = \frac{u_0}{1+u_0 t}$

(d) 2a,b men inte 2c.

(e) ...

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) För att lösa $Ax = b$ omvandlar vi den utvidgade matrisen $[A \mid b]$ till radreducerad trappstegsform med hjälp av Gauss eliminationsmetod. Vi får

$$[\hat{A} \mid \hat{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & | & -\frac{1}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Vi löser det ekvivalenta ekvationssystemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$x_1 - x_3 = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 + 2x_3 = \frac{1}{3}$$

Variabeln x_3 är fri: $x_3 = s$. De andra äro bundna: $x_2 = \frac{1}{3} - 2s$, $x_1 = -\frac{1}{3} + s$, så att lösningen blir

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pivotkolonnerna, dvs kolonn nr 1 och 2, i $\hat{A}$ är linjärt oberoende och en bas för $R(\hat{A})$. Då är kolonn nr 1 och 2 i A en bas för $R(A)$, dvs

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(c) För att uttrycka $b = x_1 a_1 + x_2 a_2$ löser vi ekvationssystemet $[a_1 \ a_2]x = b$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Räkningarna i (a) ger genast $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b = x_1 a_1 + x_2 a_2 = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(d) Räkningarna i (a) visar direkt: $\det(A) = c\det(\hat{A}) = 0$ och att kolonnerna är linjärt beroende. Då är A singulär.

(e) Antag $u, v \in R(A)$ och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Då är $u = Ax$, $v = Ay$, så att $\alpha u + \beta v = \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$. Det betyder att $\alpha u + \beta v \in R(A)$. Detta visar att $R(A)$ är ett linjärt rum. Dessutom har vi $Ax \in \mathbf{R}^3$, så att $R(A) \subset \mathbf{R}^3$. Vi har visat att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

4. (a) Sätt $w_1 = u$, $w_2 = u'$, så fås

$$\begin{aligned} w_1' &= u' = w_2 \\ w_2' &= u'' = -u + u^3 = -w_1 + w_1^3 \end{aligned}$$

vilket är det önskade systemet

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 + w_1^3 \end{bmatrix}, \quad w_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}.$$

(b) De stationära lösningarna ges av $f(w) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} w_2 &= 0 \\ -w_1 + w_1^3 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $w_2 = 0$, $w_1 = 0, \pm 1$. Vi får tre stationära lösningar: $\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Jacobi-matrisen är

$$f'(w) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 3w_1^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f'(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ blir

$$\tilde{f}(w) = f(\bar{w}) + f'(\bar{w})(w - \bar{w}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 - 1 \\ w_2 - 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{ty } f(\bar{w}) = 0.$$

(d) Med $w = \bar{w} + \Delta w$, $\Delta w = w - \bar{w}$, får vi:

$$\Delta w' = (w - \bar{w})' = w' = f(w) = f(\bar{w} + \Delta w) = f(\bar{w}) + f'(\bar{w})\Delta w + E_f, \qquad \text{ty } f(\bar{w}) = 0.$$

Om vi slopar resttermen får vi det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned} v' &= Av, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \qquad \text{med } A = f'(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \; v(t) \approx \Delta w(t) = w(t) - \bar{w}.$$

(e) Egenvärdesproblemet har lösningen

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \; \lambda_2 = -\sqrt{2}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \; g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

och lösningen till linjäriserade systemet blir

$$v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} g_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} g_2 = c_1 e^{\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Stationära punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är instabil, ty $\lambda_1 = \sqrt{2} > 0$.

5. (a) Multiplicera ekvationen med u' så fås

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big((u')^2 + 4u^2\big) = u''u' + 4uu' = 0$$

så att

$$\frac{1}{2}\big(u'(t)^2 + 4u(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u'(0)^2 + 4u(0)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u_1^2 + 4u_0^2\big).$$

(b) Om det finns två lösningar u och v, dvs

$$\begin{aligned} &u'' + 4u = 0, && v'' + 4v = 0,\\ &u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, && v(0) = u_0,\ v'(0) = u_1, \end{aligned}$$

så uppfyller skillnaden $w = u - v$ begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &w'' + 4w = 0,\\ &w(0) = 0,\ w'(0) = . \end{aligned}$$

Resultatet i (a) ger då

$$\frac{1}{2}\big(w'(t)^2 + 4w(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(w_1^2 + w_0^2\big) = 0,$$

dvs $w(t) = 0$ och därmed $u(t) = v(t)$, dvs lösningen är unik. Det är viktigt att veta att lösningen är unik, för det betyder att alla konstruktioner av lösning ger samma resultat.

(c) Lösningen kan uttryckas

$$u(t) = u_0 \cos(2t) + \frac{1}{2}u_1 \sin(2t).$$

(d) Man skriver en fil `funk.m` som innehåller:

```
function y=funk(t,x)
A=[0 1;-4 0];
y=A*x;
```

Sedan skriver man

```
>>    u0=0; u1=1;
>>    [t,u]=my_ode('funk', [0, 10], [u0;u1], .01); plot(t,u)
```

(e) Se boken.

/stig