Matematik Chalmers

Tentamen i TMA196 Analys och linjär algebra K Kf Kb, del B, 2001–12–22 f V

Telefon: Stig Larsson 070 605 62 47, 45 46 93
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Uppgifterna 1–2 är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar. På uppgifterna 3–5 skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Obs att frågorna är formulerade så att man ofta kan svara på en delfråga även om man inte lyckats med de föregående. Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida och i Matematiskt Centrum i början av januari.

1. (a) Formulera integralkalkylens fundamentalsats.

(b) Beräkna integralen $\int_1^t x\log(x)\,dx$.

(c) Lös begynnelsevärdesproblemet (se uppgift 1b!) $\begin{cases} u'(x) = x\log(x), & x \in [1,3], \\ u(1) = 1. \end{cases}$

(d) Beräkna integralen $\int_0^2 x^3 e^{-x^4}\,dx$. (Tips: $z = x^4$.)

(e) Ange Taylors polynom av grad 3 för funktionen $\sin(x)$ i punkten $\bar{x} = 0$.

2. (a) Programmet `my_ode.m` är skrivet enligt följande specifikation:

```
function [t,u]=my_ode(f,int,ua,h)
% my_ode - solves initial value problem for general system of
%          ordinary differential equations u'=f(t,u)
%   Syntax:
%            [t,u]=my_ode(f,int,ua,h)
%   Arguments:
%            f   - string containing the name of a function file
%            int - 1x2 matrix specifying a time interval int=[a,b]
%            ua  - dx1 matrix specifying an initial value
%            h   - positive number, the stepsize
%   Returns:
%            t - nx1 matrix containg the time points with t(1)=a
%            u - nxd matrix containing the approximate solution
%   Description:
%            The program computes an approximate solution of the intial
%            value problem  u'=f(t,u), a<t<b; u(a)=ua.  Here u, f,
%            and ua are column vectors of dimension d.  The file f.m
%            must contain the function f(t,u) with syntax uprime=f(t,u).
%            The program returns the nx1 matrix t of time points with
%            t(1)=a and the nxd matrix u with row number i containing
%            the transposed solution vector at time t(i).
%            The program uses the Euler forward method.
```

Filen `funk.m` innehåller:

```
function y=funk(t,x)
y=-3*x;
```

Vi skriver följande på MATLABs kommandorad:

```
>>    [t,u]=my_ode('funk', [0, 2], 5, .01); plot(t,u)
```

Vilket begynnelsevärdesproblem löser vi? Uttryck lösningen analytiskt. Rita vad man ser i figuren.

Vänd!

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) + 2u(t) = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

(c) Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} u'(t) = -u(t)^2, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$

(d) Vilka av differentialekvationerna i uppgift 2a,b,c är linjära?

(e) Skriv en halv sida om ditt tillämpningsprojekt.

---

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Lös ekvationssystemet $Ax = b$.

(b) Bestäm en bas för värderummet $R(A)$.

(c) Uttryck b som en linjär kombination av denna bas.

(d) Beräkna $\det(A)$. Är A singulär? Är kolonnerna i A linjärt oberoende?

(e) Visa att $R(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^3$.

4. (a) Visa hur man skriver om differentialekvationen $u'' = -u + u^3$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ som ett system av två ekvationer av första ordningen:

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ w(0) &= w_0, \end{aligned} \qquad \text{med } f(w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 + w_1^3 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm alla stationära lösningar $\bar{w}$.

(c) Beräkna Jacobi-matrisen $f'(w)$. Beräkna linjäriseringen av f i punkten $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Betrakta $w(t) = \bar{w} + \Delta w(t) \approx \bar{w} + v(t)$ som en avvikelse från $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Visa att den approximativa störningen v ges av det linjäriserade systemet

$$\begin{aligned} v' &= Av, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \qquad \text{med } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(e) Lös det linjäriserade systemet (1) med egenvärdesmetoden. Är $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en stabil stationär punkt?

5. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' + 4u = 0, \\ &u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Visa att om u löser (2) så gäller

$$\frac{1}{2}\big(u'(t)^2 + 4u(t)^2\big) = \frac{1}{2}\big(u_1^2 + 4u_0^2\big).$$

(b) Entydighet. Använd resultatet i 5a för att visa att (2) har högst en lösning. Varför är det viktigt att veta att lösningen är unik?

(c) Uttryck lösningen till (2) med hjälp av speciella funktioner (såsom log, exp, sin, cos, ...). Det vill säga: lös problemet analytiskt.

(d) Hur löser man (2) med `my_ode`?

(e) Hur definieras funktionen arcsin? Ange dess definitionsmängd och rita dess graf.

`/stig`