TMA195 Analys och linjär algebra Kf Kb, del B, 2001–04–19. Lösningar.

---

1. (a) Variabelsubstitution:

$$\int_0^2 x^3 \exp(-x^4)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} z = x^4 \\ dz = 4x^3\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{4}\int_0^{16} \exp(-z)\,dz = \frac{1}{4}\Big[-\exp(-z)\Big]_0^{16} = \frac{1}{4}(1-e^{-16}).$$

(b) Partiell integration: $\displaystyle\int_a^b uv'\,dx = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v\,dx.$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\cos(5x)\,dx &= \Big[x^2\frac{1}{5}\sin(5x)\Big]_0^2 - \int_0^2 2x\frac{1}{5}\sin(5x)\,dx \\
&= \frac{4}{5}\sin(10) + \Big[2x\frac{1}{25}\cos(5x)\Big]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{25}\cos(5x)\,dx \\
&= \frac{4}{5}\sin(10) + \frac{4}{25}\cos(10) - \Big[\frac{2}{125}\sin(5x)\Big]_0^2 \\
&= \frac{4}{5}\sin(10) + \frac{4}{25}\cos(10) - \frac{2}{125}\sin(10).
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\int_{-2}^x f(y)\,dy = \begin{cases}
\displaystyle\int_{-2}^x 0\,dy = 0, \quad x\in[-2,-1], \\
\displaystyle\int_{-2}^{-1} 0\,dy + \int_{-1}^x (1+y)\,dy = \tfrac12 + x + \tfrac12 x^2, \quad x\in[-1,0], \\
\displaystyle\int_{-2}^{-1} 0\,dy + \int_{-1}^0 (1+y)\,dy + \int_0^x (1-y)\,dy = \tfrac12 + x - \tfrac12 x^2, \quad x\in[0,1], \\
\displaystyle\int_{-2}^{-1} 0\,dy + \int_{-1}^0 (1+y)\,dy + \int_0^1 (1-y)\,dy + \int_1^x 0\,dy = 1, \quad x\in[1,\infty).
\end{cases}$$

(b) Medelvärdet är $\bar f = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^2 f(y)\,dy = \dfrac{1}{4}.$

(c) Medelvärdessatsen säger att det finns (minst) en punkt $\bar x \in [-2,2]$, sådan att $f(\bar x) = \bar f$. (I det här fallet är $\bar x = \pm\frac{3}{4}$.)

3. (a) Fundamentalsatsen säger att lösningen ges av $u(x) = u_0 + \displaystyle\int_{-2}^x f(y)\,dy$. Integralen har vi redan räknat ut i uppgift 2. Villkoret $0 = u(0)$ ger $0 = u_0 + \displaystyle\int_{-2}^0 f(y)\,dy = u_0 + \frac{1}{2}$, dvs $u_0 = -\frac{1}{2}$.

(b) Separabel differentialekvation:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= x(1+u^2) \\
\int_1^{u(x)} \frac{d\tilde u}{1+\tilde u^2} &= \int_0^x \tilde x\,d\tilde x \\
\Big[\arctan(\tilde u)\Big]_1^{u(x)} &= \Big[\frac{\tilde x^2}{2}\Big]_0^x \\
\arctan(u(x)) - \arctan(1) &= \frac{x^2}{2} \\
\arctan(u(x)) &= \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2} \\
u(x) &= \tan\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2}\Big)
\end{aligned}$$

(c) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function uprime=funk(x,u)
uprime=x*(1+u^2);
```

sedan exekverar man matlabkommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],1)
```

4. (a)

$$N(A) = \Big\{x \in \mathbf{R}^4 : Ax = 0\Big\},$$
$$R(A) = \Big\{y \in \mathbf{R}^4 : y = Ax\Big\}.$$

(b) Gauss eliminationsmetod: vi multiplicerar den första raden med -4, -1, respektive -1, och adderar till de andra raderna. Detta leder till den ekvivalenta matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi multiplicerar den andra raden med $-\frac{1}{5}$ respektive $-\frac{2}{5}$ och adderar till de två nedersta raderna, vilket leder till den ekvivalenta matrisen

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = 0$ är ekvivalent med $\tilde{A}x = 0$ med lösningen $x = 0$.
(c) För trappstegsmatrisen ovan gäller $\det(\tilde{A}) = 1 \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot (-\frac{12}{5}) = -12$ och därför har vi $\det(A) = \det(\tilde{A}) = -12$ och A är icke-singulär.
(d) Eftersom A är icke-singulär så har ekvationen $Ax = b$ en unik lösning för alla b.

5. (a), (b), (c) se boken.
(d) Vi använder högra respektive vänstra rektangelregeln med steget $h = 1$ för att approximera integralen $\log(4) = \displaystyle\int_1^4 x^{-1}\,dx$. Vi får

$$1 < \frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \log(4) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2.$$

/stig