Matematik Chalmers

Tentamen i TMA195 Analys och linjär algebra Kf Kb, del B, 2001–04–19

Telefon: Stig Larsson 772 35 43, 070 605 62 47
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. 30 poäng krävs för godkänt. Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Obs att frågorna är formulerade så att man ofta kan svara på en delfråga även om man inte lyckats med de föregående. Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut.

1. (a) Beräkna $\int_0^2 x^3 \exp(-x^4)\,dx$.

(b) Vad är partiell integration? Tillämpa den på $\int_0^2 x^2 \cos(5x)\,dx$.

2. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{för } -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & \text{för } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

(a) Beräkna $\int_{-2}^x f(y)\,dy$ för $x \ge -2$.

(b) Beräkna medelvärdet av f över intervallet $[-2, 2]$.

(c) Tillämpa medelvärdessatsen för integraler på detta medelvärde.

3. (a) Låt f vara som ovan. Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) = f(x),\ x > -2;\ u(-2) = u_0$. Vad säger integralkalkylens fundamentalsats om detta? Bestäm u_0 så att $u(0) = 0$.

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) = x(1 + u(x)^2),\ x > 0;\ u(0) = 1$. Vad kallas denna typ av differentialekvation?

(c) Beskriv hur man löser begynnelsevärdesproblemet i (b) med det program `my_ode.m` som du själv skrivit.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med nollrummet $N(A)$ och värderummet $R(A)$ till A?

(b) Lös ekvationen $Ax = 0$.

(c) Bestäm $\det(A)$. Är A singulär?

(d) Vad säger ovanstående kalkyler om lösningsmängden till den inhomogena ekvationen $Ax = b$?

5. (a) Beskriv hur vi definierar (konstruerar) logaritmfunktionen $\log(x)$.

(b) Räkna upp logaritmens viktigaste egenskaper. Ange dess definitionsmängd och värdemängd.

(c) Använd definitionen för att bevisa någon av logaritmens egenskaper.

(d) Använd definitionen för att bevisa den grova uppskattningen $1 < \log(4) < 2$.

`/stig`