Matematik Chalmers

Tentamen i TMA195 Analys och linjär algebra Kf Kb, del B, 2000–12–12

Telefon: Stig Larsson 772 35 43, 070 605 62 47
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Obs att frågorna är formulerade så att man ofta kan svara på en delfråga även om man inte lyckats med de föregående. Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Rättningsprotokollet anslås på kursens hemsida i början av januari.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^2 y\cosh(3y)\,dy$.

(b) Beräkna $u(x) = \displaystyle\int_0^x |y|\,dy$.

(c) Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) = x^3,\ x > 1;\ u(1) = 1$.

(d) Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) = \sqrt{u(x)},\ x > 0;\ u(0) = 0$.

2. Givet `A=[1 2;2 1]`, `x=[1;1]` och filen `f.m`

```
function y=f(B,b,n)
y=b;
for i=1:n
  y=B*y;
end
```

Beräkna vad resultatet blir om följande skrivs i matlab:

(a) `a=A*x`

(b) `b=x'*A(:,1)`

(c) `c=f(A,x,2)`

(d) `[P,D]=eig(A)`

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med nollrummet $N(A)$ till A? Visa att $N(A)$ är ett linjärt underrum till $\mathbf{R}^4$.

(b) Lös ekvationen $Ax = 0$. Bestäm en bas för $N(A)$.

(c) Bestäm $\det(A)$. Är A singulär?

(d) Vad säger ovanstående kalkyler om lösningsmängden till den inhomogena ekvationen $Ax = b$?

(e) Bestäm en ON-bas till $N(A)$.

Vänd!

4. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$u'(t) + au(t) = f(t),\ t > 0; \quad u(0) = u_0,$$

där konstanterna a, u_0 och funktionen f är givna.

(a) Härled lösningsformeln

$$u(t) = e^{-at}u_0 + \int_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\, ds.$$

(b) Antag nu att f är konstant, dvs $f(t) = \bar{f}$ för alla t. Bestäm lösningen $u(t)$. För vilka värden på a uppnås ett gränsvärde $u(t) \to \bar{u}$ då $t \to \infty$? Visa att $\bar{u}$ är en stationär lösning. Hur ska a, u_0 och $\bar{f}$ väljas för att $\bar{u} = 0.5$?

(c) Betrakta nu $f(t)$ som en störning av $\bar{f}$ och u_0 som en störning av $\bar{u}$. Visa att $v(t) = u(t) - \bar{u}$ satisfierar

$$v'(t) + av(t) = f(t) - \bar{f},\ t > 0; \quad v(0) = u_0 - \bar{u},$$

och att

$$v(t) = e^{-at}(u_0 - \bar{u}) + \int_0^t e^{-a(t-s)} (f(s) - \bar{f})\, ds.$$

Antag att $a > 0$, $|u_0 - \bar{u}| \le \epsilon$ och $|f(t) - \bar{f}| \le \delta$ för alla t. Visa att

$$|u(t) - \bar{u}| \le \epsilon + \delta/a.$$

(d) Vad har ovanstående kalkyler med begreppet *stabilitet* att göra?

5. (a) Beskriv (kortfattat) hur vi konstruerar (definierar) funktionen $\sin(x)$.

(b) Visa "trigonometriska ettan" $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(c) Beskriv hur man beräknar $\sin(x)$ med det program `my_ode.m` som du själv skrivit.

(d) Hur definierar vi funktionen $\arcsin(x)$?

`/stig`