TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 2000–08–26.
Lösningar.

---

1. (a) $\arctan(x) = x + R_2(x)$, $R_2(x) = -2\dfrac{1-3\hat{x}^2}{(1+\hat{x}^2)^3}\dfrac{x^3}{6}$, där $\hat{x}$ ligger mellan 0 och x.
(b) $|R_2(x)| = \frac{1}{3}\dfrac{|1-3\hat{x}^2|}{(1+\hat{x}^2)^3}|x|^3 \leq \frac{2}{3}|x|^3$ för $-1 \leq x \leq 1$, ty $|1-3\hat{x}^2| \leq 2$ och $(1+\hat{x}^2)^3 \geq 1$.
(c) $\arctan(0.1) \approx 0.1$ med felet $|R_2(0.1)| \leq \frac{2}{3}0.1^3 < 10^{-3}$.

2. Se boken.

3. (a) Ekvationen är $(D^2+2D+10)u = 0$. Karakteristiska ekvationen är $r^2+2r+10 = 0$ med rötterna $r_1 = -1+3i$, $r_2 = -1-3i$. Lösningen blir

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t}\big(A\cos 3t + B\sin 3t\big),\\ u'(t) &= -e^{-t}\big(A\cos 3t + B\sin 3t\big) + 3e^{-t}\big(-A\sin 3t + B\cos 3t\big). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$\begin{aligned} u_0 &= u(0) = A,\\ u_1 &= u'(0) = -A + 3B, \end{aligned}$$

dvs $A = u_0$, $B = \frac{1}{3}(u_1+u_0)$. Således

$$u(t) = e^{-t}\big(u_0\cos 3t + \tfrac{1}{3}(u_0+u_1)\sin 3t\big).$$

(b)

$$\begin{aligned} |u(t)| &= e^{-t}\big|u_0\cos 3t + \tfrac{1}{3}(u_0+u_1)\sin 3t\big|\\ &\leq |u_0||\cos 3t| + \tfrac{1}{3}(|u_0|+|u_1|)|\sin 3t|\\ &\leq \tfrac{4}{3}|u_0| + \tfrac{1}{3}|u_1|, \quad \text{för } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Alltså

$$\max_{0\leq t\leq T}|u(t)| \leq \tfrac{4}{3}|u_0| + \tfrac{1}{3}|u_1|.$$

(c) Man skriver det som ett system av första ordningen: $v_1 = u$, $v_2 = u'$ och

$$v' = Av,\ v(0) = v_0; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} u_0\\ u_1 \end{bmatrix}.$$

Sedan använder man en numerisk metod, t ex, framåt Euler:

$$\begin{aligned} U(0) &= v_0,\\ U(t_i) &= U(t_{i-1}) + h_iAU(t_{i-1}) = (I+h_iA)U(t_{i-1}). \end{aligned}$$

(d) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
yprime=[0 1; -10 -2]*x;
```

sedan exekverar man matlabkommandot

```
>> [t,x]=my_ode('funk',[0;10],[1;2])
```

där `[0;10]` anger ett tidsintervall och `[1;2]` är begynnelsevärdena.

4. Se boken.

5. (a) Ekvationen $f(x)=0$ betyder

$$\begin{aligned} x_1+x_1x_2^2+x_1x_3^2&=0,\\ -x_1+x_2-x_2x_3+x_1x_2x_3&=0\\ x_2+x_3-x_1^2&=0 \end{aligned}$$

Den första ekvationen ger $x_1\left(1+x_2^2+x_3^2\right)=0$, dvs $x_1=0$. De andra ekvationerna ger sedan $x_2=x_3=0$ eller $x_3=-x_2=1$. Det finns alltså två lösningar $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ och $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$.

(b) Jacobimatrisen är

$$f'(x)=\begin{bmatrix}1+x_2^2+x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3\\ -1+x_2x_3 & 1-x_3+x_1x_3 & -x_2+x_1x_2\\ -2x_1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(c) Första steget i Newtons metod:

evaluera: $A=f'(x^{(0)})=f'(1,0,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix}$,

$b=-f(x^{(0)})=-f(1,0,0)=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$,

lös ekvationssystemet $Ah=b$: $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow h^{(0)}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$,

uppdatera: $x^{(1)}=x^{(0)}+h^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

Det andra steget blir:

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow h^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+h^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

vi har hittat den ena lösningen.

(d) "Inversa funktionssatsen": om (i) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ är deriverbar, (ii) $f(\bar{x})=\bar{y}$, (iii) $f'(\bar{x})$ är inverterbar, så har ekvationen $f(x)=y$ en unik lösning x nära $\bar{x}$ för varje y nära $\bar{y}$, dvs inversa funktionen $x=f^{-1}(y)$ är definierad för alla y nära $\bar{y}$.

I vårt fall har vi två lösningar. Den ena är:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \bar{y}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad f'(0,0,0)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

med $\det(f'(0,0,0))=1\neq 0$. Förutsättningarna (i), (ii), (iii) är alltså uppfyllda.

Den andra lösningen är:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f'(0,-1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

med $\det(f'(0,-1,1)) = 3 \neq 0$. Förutsättningarna (i), (ii), (iii) är alltså uppfyllda. Beviset av inversa funktionssatsen bygger på (kvasi-Newton) iterationen

$$\begin{aligned} & x^{(0)} = \bar{x} \\ & \text{för } k = 0, 1, 2, \dots \\ & f'(\bar{x})h^{(k)} = -\big(f(x^{(k)}) - y\big) \\ & x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} \end{aligned}$$

dvs

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f'(\bar{x})^{-1}\big(f(x^{(k)}) - y\big).$$

/stig