Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 2000–08–26, f mn**

Telefon: Håkan Granath 0740–45 90 22 (Stig Larsson 070 605 6247)
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

---

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.

Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut.

**1.** (a) Låt $f(x) = \arctan(x)$. Beräkna dess Taylorpolynom av grad $\leq 2$ med baspunkt 0. Beräkna resttermen $R_2(x)$.

(b) Visa att $|R_2(x)| \leq |x|^3$ för $-1 \leq x \leq 1$.

(c) Använd detta för att beräkna en approximation till $\arctan(0.1)$. Hur stort är felet?

**2.** (a) Hur definierar vi funktionen $\exp(x)$? (Ange definerande differentialekvation, konstruktion av lösning, ...)

(b) Bevisa att $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

**3.** (a) Lös (analytiskt) begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' + 2u' + 10u = 0, \quad t > 0, \\ &u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{aligned}$$

(b) Skissa grafen till $u$. Visa att $\max\limits_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \leq \frac{4}{3}|u_0| + \frac{1}{3}|u_1|$.

(c) Beskriv en metod för numerisk lösning av begynnelsevärdesproblemet.

(d) Beskriv hur man går tillväga för att lösa begynnelsevärdesproblemet med hjälp av det matlab-program som du själv skrivit.

**4.** Formulera integralkalkylens fundamentalsats. Ange de olika stegen i beviset (utan detaljer).

**5.** (a) Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras av

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 \\ -x_1 + x_2 - x_2x_3 + x_1x_2x_3 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(x) = 0$.

(b) Beräkna $f'(x)$.

(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$ med startvektor $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Vilken sats garanterar att ekvationen $f(x) = y$ har en unik lösning nära $x = 0$ och en unik lösning nära $x = (0, -1, 1)^t$ för alla $y$ nära 0? Kontrollera att satsens förutsättningar är uppfyllda. Skriv ned den iteration som används i beviset av satsen.

`/stig`