TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 2000–04–20. Lösningar.

---

1. (a)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\,dt = \left\{ \begin{array}{c} y=\sin(t) \\ dy=\cos(t)\,dt \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \Big[\arctan(y)\Big]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x \frac{dt}{t^2-t-12} = \int_0^x \frac{dt}{(t+3)(t-4)} = \{\text{partialbråksuppdelning}\} \\
&= -\frac{1}{7}\int_0^x \frac{dt}{t+3} + \frac{1}{7}\int_0^x \frac{dt}{t-4} = \left\{ \begin{array}{ll} y=t+3 & z=4-t \\ dy=dt & dz=-dt \end{array} \right\} \\
&= -\frac{1}{7}\int_3^{x+3} \frac{dy}{y} + \frac{1}{7}\int_4^{4-x} \frac{dz}{z} = \{x+3>0 \text{ och } 4-x>0\} \\
&= \frac{1}{7}\Big(-\log(x+3)+\log(3)+\log(4-x)-\log(4)\Big) \\
&= \frac{1}{7}\log\Big(\frac{3}{4}\frac{4-x}{3+x}\Big) \quad \text{för } -3<x<4.
\end{aligned}$$

(c) Lipschitzkonstanten:

$$L_f = \max_{0\le x\le 1} |f'(x)| = \max_{0\le x\le 1} \frac{1}{|x^2-x-12|} = \frac{1}{12},$$

ty en enkel undersökning visar att $|x^2-x-12|$ antar sitt minimum i intervallets ändpunkter $x=0$ och $x=1$.

2. (a) Funktionerna $u(x)=\sin(x)$ och $v(x)=\cos(x)$ definieras av

$$\begin{array}{ll} u''+u=0, & v''+v=0, \\ u(0)=0,\ u'(0)=1, & v(0)=1,\ v'(0)=0. \end{array}$$

Vi antar här att dessa begynnelsevärdesproblem har unika lösningar.

(b) Sätt $w(x)=u'(x)$. Genom att derivera ekvationen för u får vi $w''+w=0$. Dessutom: $w(0)=u'(0)=1$ och $w'(0)=u''(0)=-u(0)=0$. Alltså satisfierar w samma begynnelsevärdesproblem som v och på grund av entydighet måste då $w=v$, dvs $D\sin(x)=\cos(x)$.

(c) Multiplicera differentialekvationen för u med u' så fås

$$\tfrac{1}{2}D\Big((u')^2+u^2\Big) = u''u'+uu' = 0,$$

dvs

$$u'(x)^2+u(x)^2 = \text{ konstant } = u'(0)^2+u(0)^2 = 1.$$

Alltså $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

(d) Man skriver differentialekvationen som ett system av första ordningen: $\tilde{u}_1=u$, $\tilde{u}_2=u'$ och

$$\tilde{u}'=A\tilde{u},\ \tilde{u}(0)=\tilde{u}_0; \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sedan använder man en numerisk metod, t ex, framåt Euler:

$$\begin{aligned}
&U(0)=\tilde{u}_0, \\
&U(x_i)=U(x_{i-1})+h_iAU(x_{i-1})=(I+h_iA)U(x_{i-1}).
\end{aligned}$$

3. (a) Differentialekvationen är separabel:

$$
\begin{aligned}
-\frac{du}{u^3} &= k \\
\int_{u_0}^{u(T)} \frac{-1}{u^3}\,du &= k\int_0^T dt \\
\left[\frac{1}{2u^2}\right]_{u_0}^{u(T)} &= kT \\
\frac{1}{u(T)^2} &= 2kT + \frac{1}{u_0^2} \\
u(T)^2 &= \frac{u_0^2}{1+2kTu_0^2} \\
u(T) &= \pm\sqrt{\frac{u_0^2}{1+2kTu_0^2}} = \frac{u_0}{\sqrt{1+2kTu_0^2}},
\end{aligned}
$$

där vi i sista steget använde att koncentrationen är positiv. Halveringstiden fås genom att sätta in $u(T_{1/2}) = \frac{1}{2}u_0$:

$$
\tfrac{1}{2}u_0 = \frac{u_0}{\sqrt{1+2kT_{1/2}u_0^2}}, \qquad T_{1/2} = \frac{3}{2ku_0^2}.
$$

(b) Man skriver en m-fil kallad `funk.m`:

```
function yprime=funk(t,x)
k=5;
yprime=-kx^3;
```

sedan exekverar man matlab-kommandona

```
>> T=10; u0=1; h=.01;
>> [t,u]=my_ode('funk',[0;T],u0,h);
```

där `[0;T]` anger ett tidsintervall, `u0` är begynnelsevärdet och `h` är steglängden.

4. (a) Se kurslitteraturen. Taylors formel är

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} \\
+ f^{(4)}(a)\frac{(x-a)^4}{4!} + R_4(x),
\end{aligned}
$$

där

$$
R_4(x) = \int_a^x \frac{(x-y)^4}{4!} f^{(5)}(y)\,dy.
$$

(b) Med $f(x) = \sin(x)$ och $a = 0$ får vi

$$
\sin(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + R_4(x), \quad R_4(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^4}{4!}\cos(y)\,dy.
$$

(c) Om $x \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
|R_4(x)| = \Big|\int_0^x \frac{(x-y)^4}{4!}\cos(y)\,dy\Big| &\leq \int_0^x \frac{(x-y)^4}{4!}|\cos(y)|\,dy \\
&\leq \int_0^x \frac{(x-y)^4}{4!}\,dy = \frac{x^5}{5!} = \frac{|x|^5}{5!}.
\end{aligned}
$$

Om $x < 0$:

$$
\begin{aligned}
|R_4(x)| &= \Big| \int_0^x \frac{(x-y)^4}{4!} \cos(y)\, dy \Big| \leq \int_x^0 \frac{(y-x)^4}{4!} |\cos(y)|\, dy \\
&\leq \int_x^0 \frac{(y-x)^4}{4!}\, dy = \frac{(-x)^5}{5!} = \frac{|x|^5}{5!}.
\end{aligned}
$$

Alltså:

$$
|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120} \quad \text{för alla } x.
$$

5. (a) Ekvationen $f(x) = 0$ betyder

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 &= 0, \\
-x_1 + x_2 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 &= 0 \\
x_2 + x_3 - x_1^2 &= 0
\end{aligned}
$$

Den första ekvationen ger $x_1\big(1 + x_2^2 + x_3^2\big) = 0$, dvs $x_1 = 0$. De andra ekvationerna ger sedan $x_2 = x_3 = 0$ eller $x_3 = -x_2 = 1$. Det finns alltså två lösningar $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Jacobimatrisen är

$$
f'(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_2^2 + x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ -1 + x_2x_3 & 1 - x_3 + x_1x_3 & -x_2 + x_1x_2 \\ -2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

(c) Första steget i Newtons metod:

$$
\begin{aligned}
&\text{evaluera:} \quad A = f'(x^{(0)}) = f'(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
&\qquad\qquad b = -f(x^{(0)}) = -f(1,0,0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\text{lös ekvationssystemet } Ah = b: \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow h^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
&\text{uppdatera:} \quad x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Det andra steget blir:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow h^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
x^{(2)} = x^{(1)} + h^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

vi har hittat den ena lösningen.

(d) "Inversa funktionssatsen": om (i) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ är deriverbar, (ii) $f(\bar{x}) = \bar{y}$, (iii) $f'(\bar{x})$ är inverterbar, så har ekvationen $f(x) = y$ en unik lösning x nära $\bar{x}$ för varje y nära $\bar{y}$, dvs inversa funktionen $x = f^{-1}(y)$ är definierad för alla y nära $\bar{y}$.

I vårt fall har vi två lösningar. Den ena är:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f'(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

med $\det(f'(0,0,0)) = 1 \neq 0$. Förutsättningarna (i), (ii), (iii) är alltså uppfyllda.
Den andra lösningen är:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f'(0,-1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

med $\det(f'(0,-1,1)) = 3 \neq 0$. Förutsättningarna (i), (ii), (iii) är alltså uppfyllda.
Beviset av inversa funktionssatsen bygger på (kvasi-Newton) iterationen

$$\begin{aligned} &x^{(0)} = \bar{x} \\ &\text{för } k = 0,1,2,\ldots \\ &f'(\bar{x})h^{(k)} = -\big(f(x^{(k)}) - y\big) \\ &x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} \end{aligned}$$

dvs

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f'(\bar{x})^{-1}\big(f(x^{(k)}) - y\big).$$

`/stig`