Matematik Chalmers

Tentamen i TMA740B Analys i en variabel Kf Kb, del B, 2000–04–20

Telefon: Roger Bengtsson 772 1048
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng.
Skriv väl; endast välformulerade lösningar ger full poäng!
Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut.

1. (a) Beräkna

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}\,dt.$$

(b) Bestäm definitionsmängden för

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 - t - 12}.$$

Beräkna $f(x)$.

(c) Bestäm en Lipschitzkonstant för f på intervallet $[0,1]$.

2. (a) Vilka begynnelsevärdesproblem används för att definiera funktionerna $\sin(x)$ och $\cos(x)$?

(b) Använd dessa för att bevisa att $D\sin(x) = \cos(x)$.

(c) Använd dessa för att bevisa "trigonometriska ettan".

(d) Ange en metod för numerisk beräkning av $\sin(x)$.

3. En kemisk reaktion sägs vara av ordning 3 om reaktionshastigheten ges av

$$u'(t) = -ku^3(t),$$

där $u(t)$ är det reagerande ämnets koncentration vid tiden t och k en positiv konstant.

(a) Bestäm en formel för koncentrationen som funktion av tiden t och begynnelsekoncentrationen u_0. Bestäm halveringstiden.

(b) Beskriv hur man går tillväga för att lösa detta problem med hjälp av det matlab-program som du själv skrivit.

4. (a) Formulera och bevisa Taylors formel av ordning 4 (dvs med polynom av grad ≤ 4.)

(b) Utveckla funktionen $\sin(x)$ i Taylorpolynom av grad ≤ 4 kring punkten $x = 0$. Glöm inte resttermen R_4.

(c) Bestäm en konstant C sådan att $|R_4(x)| \leq C|x|^5$ för alla x.

5. (a) Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definieras av

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 \\ -x_1 + x_2 - x_2x_3 + x_1x_2x_3 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Lös (analytiskt) ekvationen $f(x) = 0$.

(b) Beräkna $f'(x)$.

(c) Genomför första steget i Newtons metod för ekvationen $f(x) = 0$ med startvektor $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Vilken sats garanterar att ekvationen $f(x) = y$ har en unik lösning nära $x = 0$ och en unik lösning nära $x = (0, -1, 1)^t$ för alla y nära 0? Kontrollera att satsens förutsättningar är uppfyllda. Skriv ned den iteration som används i beviset av satsen.

/stig