# Analys o Linjär algebra

$$\boxed{f(x) = 0}$$



# Analys o Linjär algebra

Lektion 1



# Kurstema

Tema:

$\boxed{f(x) = 0 \quad \text{Hitta } x \text{ !}}$

- vad menas ?
- varför ?
- hur ?



# Funktioner m.m.

**Grundläggande begrepp:**

- variabler
- samband
- modell
- funktion
- ekvation
- lösning
- beräkning

# Funktioner m.m.

Vidare

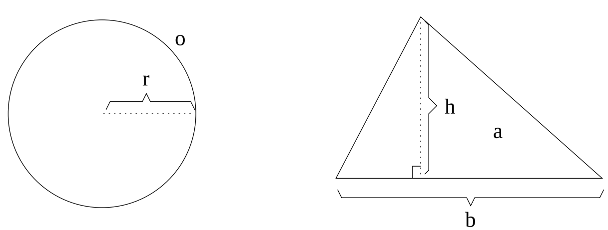
- existens
- entydighet
- stabilitet
- residual - fel



# Funktioner m.m.

**Exempel** För cirklar verkar gälla

$$o = c\,r,$$




där $c$ är en konstant $\approx 6.28$.



# Funktioner m.m.

**Exempel** För trianglar gäller

$$a = \frac{b \cdot h}{2},$$

där $a$ arean.

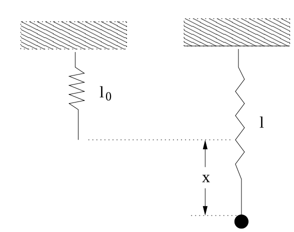
Här $r, o, b, h, a$ *variabler*, där t.ex. $r$ resp. $b$ och $h$ kan betraktas som *oberoende variabler*, varvid $o$ resp. $a$ blir *beroende variabler*.



# Funktioner m.m.

**Exempel** För en fjäder verkar gälla (Hooke)

$$\sigma = k\,(l - l_0) = k\,x,$$




där $\sigma$ spänningen/reaktionskraften, $x = l - l_0$ längdförändringen/töjningen, $k$ konstant.

# Funktioner m.m.

Variabelsambandet $\sigma = k\,x$ är en matematisk *modell* av sambandet mellan töjning och spänning (Hookes lag).

**Exempel** Vid fritt fall gäller

$$v = g\,t, \quad s = g\,\frac{t^2}{2},$$

där $t$ är tiden, $v$
är (fall)hastigheten, $s$ är sträckan, och $g$ är en konstant, $\approx 10$.



# Funktioner m.m.

Här är $v$ och $s$ *funktioner* av $t$. Kan uttryckas

$$v = f_1(t), \quad \text{där } f_1(t) = 10\,t,$$

resp.

$$s = f_2(t), \quad \text{där } f_2(t) = 10\,\frac{t^2}{2} = 5\,t^2,$$

eller kortare,

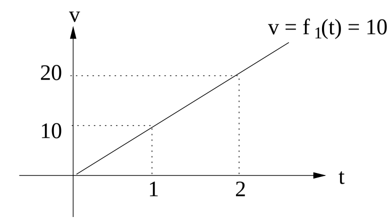
$$v(t) = 10\,t, \quad s(t) = 5\,t^2.$$

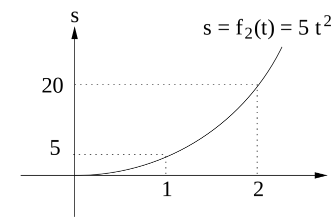
$f_1$ resp. $f_2$ utgår alltså från ett $t$-värde och ger motsv. hastighet $v = f_1(t)$ resp. sträcka $s = f_2(t)$.



# Funktioner m.m.

Funktioner kan visualiseras med *grafer*:

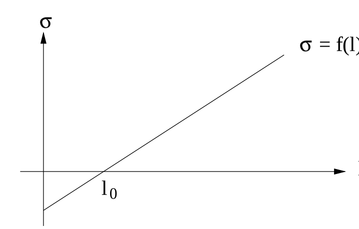





# Funktioner m.m.

Sambandet $\sigma = k\,(l - l_0)$ kan åskådligas:




Vilka samband är *linjära*? Vilket är *icke-linjärt*?
Variablerna $v$ och $t$ är proportionella (med proportionalitetsfaktor $g \approx 10$).

# Funktioner m.m.

En *ekvation* är en “likheter som vill bli uppfylld”:

**Exempel** Bestäm den töjning $x$ som motsvarar spänningen $2$ om $k = 3$:

$$3\,x = 2.$$

Att *lösa* en ekv. $\approx$ att hitta det/de $x$ som “*passar*” i ekv. Här $x = \frac{2}{3} = 0.6666...$



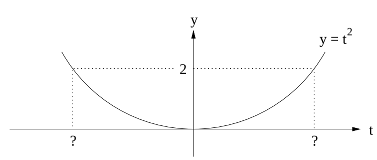
# Funktioner m.m.

**Exempel** Bestäm den tid som motsvarar fallsträckan $10$:

$$5\,t^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 2.$$

Vilket/vilka $t$ passar i denna ekv.?

- Finns lösning ?
- Finns flera ?
- Är den/de *felkänsliga* ($g \approx 10$)?






# Funktioner m.m.

## Felkällor

**Exempel** Hur lång tid tar ett fritt fall på $10$ meter?

Modell: $10\,\frac{t^2}{2} = 10, \quad$ dvs $t^2 = 2$.

Lösning: $t = 1.4$

Modelleringfel: Friktion försummad, och $g = 9.81 < 10$.

Beräkningsfel: $t = 1.4$ löser inte ekv. $t^2 = 2$ exakt, ty $1.4^2 = 1.96 \neq 2$.



# Funktioner m.m.

**Residual**: Idealt $t$ uppfyller $f(t) = t^2 - 2 = 0$. För vårt $t = 1.4$ gäller $f(1.4) = -0.04$, som kallas *residualfelet*, eller bara *residualen*.

Vad säger residualen om felet i $t$-värdet?, dvs vad säger $f(t)$-felet om $t$-felet? Finns samband?

# Funktioner m.m.

## Omskrivning av ekvation

Ekvationer med samma lösningar kallas *ekvivalenta*.

**Exempel**

$$x^2 = 2\,x + 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2\,x - 1}_{=:f(x)} = 0.$$

Speciellt: En ekv. kan alltid skrivas på formen $f(x) = 0$.



# Funktioner m.m.

Omvänt gäller t.ex.:

$$2\,f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x + f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$x = g(x)$ där $g(x) = x + \alpha\,f(x)$ med $\alpha \neq 0$.

Kommer att utnyttjas vid s.k. *fixpunktsiteration* senare.



# Funktioner m.m.

Notera: Vid oförsiktig kan lösningar *tillkomma*:

$$x = 1 \underset{\Rightarrow}{\not\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } x = -1,$$

eller *försvinna*:

$$(x+1)\,x = 2\,x \underset{\Leftarrow}{\not\Leftrightarrow} x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vad är problemet här?

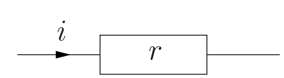


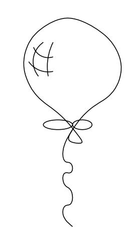
# Funktioner m.m.

## Funktioner av *flera variabler*

**Exempel** $f(b,h) = \frac{b\,h}{2}$ ger arean av $\triangle$.

**Exempel** $f(r,i) = r\,i^2$ ger effektutv. i ett motstånd med resistans $r$ vid ström $i$



# Funktioner m.m.

**Exempel** $f(T,V) = c\frac{T}{V}$ ger trycket $p$ i en gas med temp. $T$ och volym $V$ ($c = n\,R$, $n$ mol, $R$ gaskonstant.)

**Exempel** Tempen $u$ varierar med lägeskoord. $x, y, z$ och tiden $t$, dvs $u = f(x, y, z, t)$.



# Funktioner m.m.

**Definitionsmängd** "Tillåtna/avsedda input" till $f(x)$ betecknas $D(f)$, eller $D_f$.

**Exempel** Funktionen $f(x) = 1/x$ kan sägas ha definitionsmängd $\{x \in Q : x \neq 0\}$, dvs mängden av alla rationella tal $x$ utom talet $0$, eftersom divition med $0$ inte kan definieras på ett naturligt sätt.



# Funktioner m.m.

**Exempel** Betrakta "tryckfunktionen" $f(T,V) = c\frac{T}{V}$. Av "matematiska skäl" kan inte variabelkombinationer $(T,V)$ med $V = 0$ ingå i definitionsmängden. Men dessutom måste man ju här tänka sig att både $T$ och $V$ är *positiva* tal. Varför? Vidare kan man tänkas vilja inskränka definitionsmängden ytterligare (ganska mycket) för att $f(T,V)$ skall kunna ge ett någorlunda rimligt/noggrannt värde på trycket $p = f(T,V)$.

Det är alltså upp till "konstruktören" av en funktion att bestämma dess definitionsmängd, dvs vilka argument den kan "matas" med. I matematisk mening brukar man annars tänka sig att definitionsmängden är den störsrta "möjliga", som för funktionen $f(x) = 1/x$ ovan.



# Funktioner m.m.

**Värdemängd** "Resulterande output". Värdemängden för en funktion $f(x)$ betecknas $R(f)$, eller $R_f$ ($R$ för *range*.

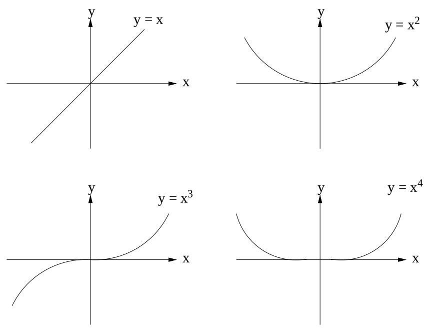
**Exempel** Funktionen $f(x) = 2x$ med definitionsmängden $D(f) = \{x : -1 < x \leq 2\} = (-1, 2]$ är helt enkelt $(-2, 4]$.

**Exempel** Lösningarna $y$ till ekvationen $y^2 = x$ brukar ju betecknas $y = \sqrt{x}$ och $y = -\sqrt{(}x)$, dvs $f(x) = \sqrt{x}$ betecknar det *positiva* tal för vilket $(f(x))^2 = x$. Man skulle förstås lika gärna kunna ha bestämt sig för att låta $\sqrt{x}$ beteckna motsvarande *negativa* tal. Men för $f(x) = \sqrt{x}$ gäller alltså speciellt $R(f) \subset [0, \infty)$.

# Funktioner m.m.

**Monom, polynom och rationella funktione**

De enklaste funktionerna: $x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots$




kan (tillsammans med $x^0 := 1$) användas till att konstruera mer komplicerade fknr, *monom*, *polynom* och *rationella* fknr:



# Funktioner m.m.

Monom: $\quad -7x^3, \quad 2.1\,x^2, \ldots$

Polynom: $\quad 2 - x + 7\,x^3$,...

dvs summor av multipler, s.k. *linjärkombinationer*, av $1 (=: x^0)$, $x$, $x^2$, $x^3$,..



# Funktioner m.m.

**Exempel** Insatskapital $k_0$, årsränta $x$, ger efter $n$ år kapitalet $k = k_0\,(1+x)^n$. Kapitaltillväxten ges av

$$\frac{k}{k_0} = (1+x)^n = f(x).$$

För

- $n = 2$: $\quad f(x) = (1+x)^2 = (1+x)\,(1+x) = 1 + 2x + x^2$
- $n = 3$: $\quad f(x) = (1+x)^3 = 1 + 3\,x + \underbrace{3\,x^2 + x^3}_{\text{rta på rta}}$

där sista resp. de två sista termerna utgörs av "ränta på ränta".

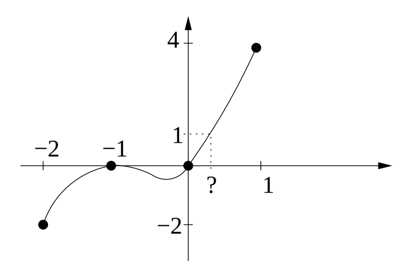


# Funktioner m.m.

**Exempel** Om insatskapitalet lyfts efter ett år, men räntan kvarstår ytterligare $2$ år erhålls $k = k_0\,x\,(1+x)^2$. För vilket $x$ erhålls $k = k_0$?, dvs

$$x\,(x+1)^2 = \underbrace{x + 2\,x^2 + x^3}_{=f(x)} = 1.$$

| x | f(x) |
|---|---|
| −2 | −2 |
| −1 | 0 |
| 0 | 0 |
| 1 | 4 |

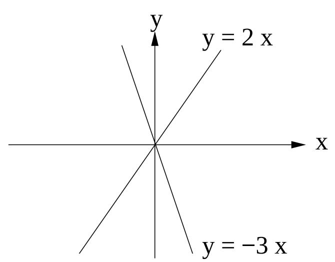


# Funktioner m.m.

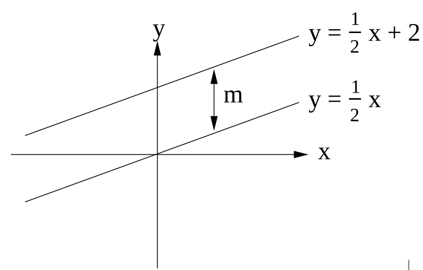
## Linjära polynom/fknr

Egentligen funktioner där $x$ och $y$ är *proportionella*, dvs $\boxed{y=k\,x}$ men i “dagligt tal” även: $\boxed{y=k\,x+m}$:

y = k x




y = k x + m






# Funktioner m.m.

$y = k\,x + m$ motsvaras av *linje* i planet. Om $k$ och en punkt $(x_1, y_1)$ på linjen kända, dvs ett $x_1$ och motsvarande $y_1 = k\,x_1 + m$, så kan $m$ beräknas:

$$m = y_1 - k\,x_1.$$

Om två punkter $(x_1, y_1)$ och $(x_2, y_2)$ på linjen givna så kan både $k$ och $m$ beräknas:

$$y_1 = k\,x_1 + m$$
$$y_2 = k\,x_2 + m$$

ger

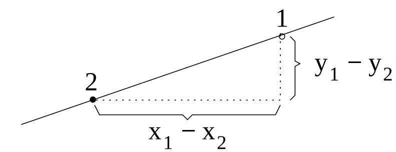
$$y_1 - y_2 = k\,x_1 + m - (k\,x_2 + m) = k\,(x_1 - x_2),$$

dvs



# Funktioner m.m.

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$




varefter $m$ fås som ovan.



# Funktioner m.m.

**Exempel** För $f(x) = k\,x + m$ gäller $f(1) = 2$ och $f(2) = -1$. Bestäm $k$ och $m$:

$$2 = k \cdot 1 + m$$
$$-1 = k \cdot 2 + m$$

ger

$$2 - (-1) = k\,(1 - 2),$$

dvs

$$3 = -k, \quad k = -3,$$

varav

$$m = 2 - (-3 \cdot 1) = 5,$$

dvs

$$f(x) = -3\,x + 5.$$ Kontrollera !!!

# Funktioner m.m.

**Polynom av grad 2**

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2,$$

kan skrivas på formen

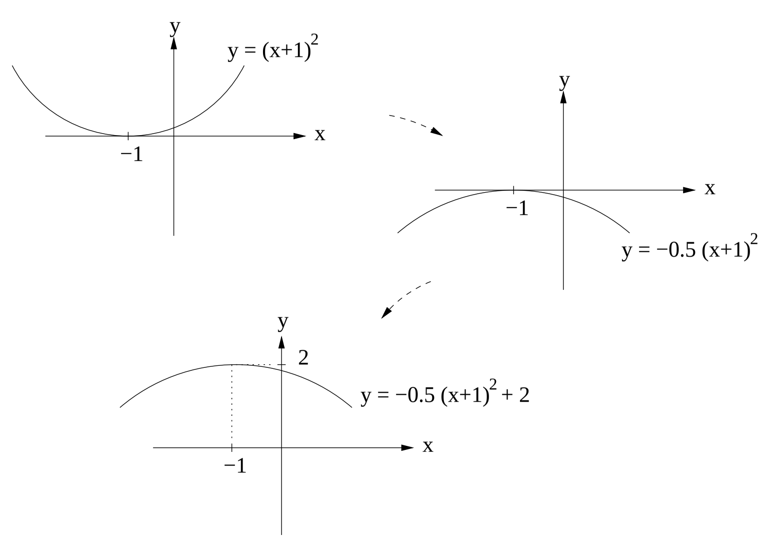
$$f(x) = a\,(x+b)^2 + c.$$

Underlättar visualisering/plottning bl.a.



# Funktioner m.m.

**Exempel** $f(x) = -0.5\,(x+1)^2 + 2$ “konstruerad” i tre steg:






# Funktioner m.m.

Omskrivningen bygger på *kvadratkomplettering*:

**Exempel**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 6\,x + 5 \\ &= \underbrace{x^2 + 6\,x + 3^2}\,-3^2 + 5 \\ &= \quad (x+3)^2 - 3^2 + 5 \\ &= (x+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Kvadratkomplettering ligger till grund för lösn. proceduren för 2:a gradsekv.:



# Funktioner m.m.

**Exempel**

$$\begin{aligned} &x^2 + 6\,x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(x+3)^2 - 3^2 + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(x+3)^2 = 3^2 - 5 \quad \Leftrightarrow \\ &x + 3 = \pm\sqrt{3^2 - 5} \quad \Leftrightarrow \\ &x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5}. \end{aligned}$$

# Funktioner m.m.

Har mött *polynom*-funktioner

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + .. + a_n\,x^n,$$

(av *grad* $n$ om $a_n \neq 0$) där $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ är givna tal/konstanter, dvs *linjärkombinationer* av de enklaste funktionerna $1, \quad x. \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots$. Linjärkombinationer av hela *polynom* ger nya polynom.

**Exempel**

$$2\,(1 - 2\,x) - 3\,(3\,x + x^3) = 2 - 13\,x - 3\,x^3.$$

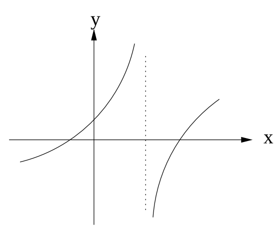


# Funktioner m.m.

Även multiplikation av polynom ger nya polynom. Kvoter mellan polynom ger däremot en ny typ av fkn, s.k. *rationella* fknr.

**Exempel**

$$f(x) = \frac{1+x}{1-2\,x}$$






# Funktioner m.m.

Dvs polynom kan i sin tur adderas (allmännare linjärkombineras), multipliceras o. divideras. Division ger s.k. *rationella* fknr.

**Exempel** $f(x) = 1 - 2\,x$, $g(x) = 3\,x + x^3$ ger

$$f(x) + g(x) = 1 + x + x^3 =: (f+g)(x)$$
$$f(x)\,g(x) = 3\,x - 6\,x^2 + x^3 - 2\,x^4 =: (f\,g)(x)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2\,x}{3\,x+x^3} =: (\tfrac{f}{g})(x).$$

Den naturliga *definitionsmängden* för funktionen $\frac{f}{g}$ är förstås $\{x : x \in D(f) \cap D(g), g(x) \neq 0\}$.



# Funktioner m.m.

**Partialbråksuppdelning:** Exempel:

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

där $A = 1/3$ och $B = 5/3$, ty

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(x+2)\,A + (x-1)\,B}{(x-1)(x+2)} = \frac{\overbrace{(A+B)}^{=2}\,x + \overbrace{(2A-B)}^{-1}}{x^2+x-2},$$

vilket ger $A$ och $B$.

# Funktioner m.m.

**Generellt:** Allmänt följer man schemat

- om täljarens gradtal $\geq$ nämnaren utförs först *polynomdivision*
- nämnaren *faktoruppdelas*
- lämplig *ansats* ställs upp
- koefficienterna identifieras



# Funktioner m.m.

**Exempel:**

$$\frac{2x+1}{x^3+x} = \frac{2x+1}{x\,(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x+C}{x^2+1},$$

varefter $A$, $B$ och $C$ beräknas som förut. Observera att linjär täljare måste ansättas om nämnaren av grad 2!



# Funktioner m.m.

**Exempel:**

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3(2x+1)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{2x+1},$$

varefter $A..D$ beräknas som förut. Observera att multipla nämnarfaktorer kräver speciell ansats!



# Funktioner m.m.

**Polynomdivision**
Givet polynom $p(x)$ av grad $m$ och $q(x)$ av grad $n$, så finns polynom $k(x)$ och $r(x)$ sådana att

$$p(x) = k(x)\,q(x) + r(x),$$

och där “restpolynomet” $r(x)$ har grad $< n$.

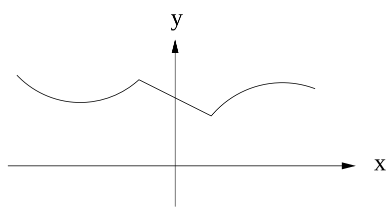
**Exempel:** $\underbrace{x^3 - x + 2}_{p(x)} = (x-1)\,(\underbrace{x^2 + x - 1}_{q(x)}) + (x+1)$.

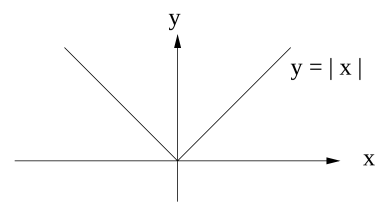
Polynomen $k(x)$ och $r(x)$ beräknas som följer:

# Funktioner m.m.

Kommer även att jobba mkt med funktioner som “styckvis” är polynom, s.k. “styckvis polynom”.

**Exempel**






# Funktioner m.m.

**Sammansättning av fknr**

$$x \to f(x) = y \to g(y).$$

Den *sammansatta* funktionen

$$g(f(x))$$

betecknas även $(g \circ f)(x)$.



# Funktioner m.m.

**Exempel** $f(x) = 1 + x^2$, $g(y) = 4\,y$ ger

$$g(f(x)) = 4\,(1 + x^2)$$
$$f(g(x)) = 1 + (4\,x)^2,$$

dvs observera speciellt att $f \circ g \neq g \circ f$ i allmänhet. (Vad betyder “i allmänhet” här?).



# Funktioner m.m.

**Hur lösa $f(X) = 0$?**

Har mött ekv.

I $\qquad 3\,x = 2,$

motsv given spänning 2 och styvhet 3, och $x$ sökt töjning, och

II $\qquad x^2 = 2$

motsv fritt fall $10$ (m) med $x$ sökt falltid.
I har lösning

$$x = \frac{2}{3} \underbrace{=}_{\text{vad menas?}} 0.666666\ldots.$$

# Funktioner m.m.

Lättare greppa *ändliga* decimalutvecklingar:

$$0.\underbrace{666..6}_{n\text{ 6:or}}\,n$$

Har att $\frac{2}{3} \underbrace{\approx}_{\text{hurdå } \approx?} 0.666..6_n$. Jo,

$$|\frac{2}{3} - 0.666..6_n| \leq 10^{-n},$$

dvs kan få $0.666..6_n$ "hur nära $2/3$ som helst"! (genom att välja $n$ tillräckligt stort för aktuellt behov).



# Funktioner m.m.

Säger att följden

$$0.6,\ 0.66,\ 0.666,\ ..$$

betecknad $\{0.666..6_n\}_{n=1}^{\infty}$, *konvergerar* mot $\frac{2}{3}$, vilket kortfattat skrivs

$$\lim_{n\to\infty} 0.666..6_n = \frac{2}{3},$$

eller ibland

$$0.666..6_n \to \frac{2}{3}, \quad \text{då } n \to \infty.$$

Notera likhetstecknet i "limesvarianten"!



# Funktioner m.m.

## Periodiska decimalutvecklingar

Rationella tal som $\frac{2}{3}$ och $\frac{2}{11}$ har *periodiska* decimalutvecklingar (AM:B&S sid. 58). Exempel:

$$\frac{2}{11} = 0.18\,18\,18\,18\,18...$$

Omvänt, (AM:B&S sid. 59-61) Periodiska decimalutvecklingar motsvarar rationalla tal!

Men, det finns ju..



# Funktioner m.m.

## Icke-periodiska decimalutvecklingar

**Exempel**

$$0.10100100010000100..$$

Detta måste alltså vara ett "*icke* rationellt", eller *irrationellt*, tal.

# Funktioner m.m.

Talet $\sqrt{2}$, om det nu finns, måste också vara irrationellt, ty antag $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ med $p$ och $q$ heltal, och att vi förkortat så att ej båda *jämna*. Då gäller

$$p^2 = 2\,q^2,$$

dvs $p$ måste vara jämnt, dvs $p = 2\,k$ för ngt heltal $k$, dvs

$$(2\,k)^2 = 4\,k^2 = 2\,q^2,$$

varav följer att även $q$ måste vara jämnt. Kommer alltså till en *motsägelse* som visar att $\sqrt{2}$ *ej* kan vara $= \frac{p}{q}$, dvs rationellt.



# Funktioner m.m.

## Hur beräkna $\sqrt{2}$ ?

dvs hitta decimalerna i $\sqrt{2} = 1.414...$.

## Bisektion, eller intervallhalvering

Söker $x$ s.a. $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Finner att $f(1) = -1 < 0$ och att $f(2) = 3 > 0$. Söker $x$ mellan $x = 1$ och $x = 2$. Kollar *mittpunkten* $x = 1.5$. Finner att $f(1.5) = f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$. Koncentrarar oss på intervallet $[1, 1.5]$ och kollar nya mittpunkten $x = 1.25$: $f(1.25) = f(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - 2 < 0$, osv...



# Funktioner m.m.

| $i$ | $x_i$ | $X_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 1.5 |
| 2 | 1.25 | 1.5 |
| 3 | 1.375 | 1.5 |
| 4 | 1.375 | 1.4375 |
| 5 | 1.40625 | 1.4375 |
| 6 | . | . |

Ser att skillnaden $X_i - x_i$ blir mindre o. mindre, och att fler och fler decimaler överensstämmer i $x_i$ och $X_i$.



# Funktioner m.m.

**Uppgift:** Skriv ett matlab program som succesivt beräknar talen $x_i$ (och $X_i$), här $1, 1, 1.25, 1.375, 1.40615, ..$, för godtycklig ekvation $f(x) = 0$ med givna $x_0$ och $X_0$ sådana att $f(x_0)$ och $f(X_0)$ har olika tecken.

# Funktioner m.m.

```
function int = MyBisect(f, int, tol)
% Solves f(x) = 0, that is, given f = f(x)
% and an interval int = [a,b]
% on which f changes sign, and a tolerance
% tol, the solver uses succesive
% bisection of the given interval int to
% finds a subinterval int of length
% at most tol, containing a solution x.
```



# Funktioner m.m.

```
%
% input arguments:
%   f    a string (such as 'sin(x)')
%        representing f(x)
%   int  an interval [a,b] such
%        that f(a)*f(b)<0, that is, on which
%        f(x) changes sign
%   tol  a given (positive) tolerance
%        (such as 0.001)

while diff(int) > tol
```



# Funktioner m.m.

```
while diff(int) > tol
  x = int(1);
  leftValue = eval(f);
  x = int(2);
  ...
  x = sum(int)/2;
  midpointValue = eval(f);
  if leftValue * midpointValue < 0
   int(2) = x;
  elseif ...
   int(1) = x;
  else
..
```



# Funktioner m.m.

```
while diff(int) > tol
..
  if leftValue * midpointValue < 0
   int(2) = x;
  elseif ...
   int(1) = x;
  else
   disp('Check that f changes sign on given
interval!')
   return
  end
end
```

# Funktioner m.m.

- komplettera koden enligt angivna specifikationer
- kör ett antal testexempel
- komplettera med data-check
- komplettera med auto-stop vid icke-konvergens
- skriv variant som levererar en approximtiv rot som utdata



# Funktioner m.m.

**Konvergens**

Noterar att följden $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ “försöker konvergera”, men mot vad? Jo, mot

$$1.414213562373....$$

Problemet är nu: Hur räknar man med sådana tal? Multiplicerar med $2$ t.ex.? Återkommer till detta !



# Funktioner m.m.

**Fixpunktsiteration**

Skriver om ekv $f(x) = 0$ som

$$\underbrace{x + \alpha f(x)}_{=:g(x)} = x, \quad \text{med ngt } \alpha \neq 0.$$

Söker $x$ s.a. $g(x) = x$, dvs $g$ lämnar $x$ fixt!

Idé: Tag godtyckligt $x_0$ och mata in i $g$. Kalla resultatet $x_1$, dvs $x_1 = g(x_0)$. Om $x_1 = x_0$ är allt klart; $x_0$ är en fixpunkt, eller hur? Annars, mata in $x_1$ i $g$ och kalla resultatet $x_2$, osv, dvs sätt

$$x_i = g(x_{i-1}).$$



# Funktioner m.m.

Dvs, iterationen

$$x_{i-1} \to g(x_{i-1}) =: x_i$$

ger följd $x_0, x_1, x_2, x_3, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ...$
Om följden $x_0, x_1, x_2, ..$ *konvergerar*, dvs talen i följden allt mindre skiljer sig åt, ger detta fler och fler decimaler i en lösning till $x = g(x)$.

# Funktioner m.m.

**När konvergens?**

Frågar oss först: Ligger $x_2$ närmare $x_1$ än vad $x_1$ ligger nära $x_0$?:

$$x_2 = g(x_1) \quad \text{och} \quad x_1 = g(x_0)$$

ger

$$|x_2 - x_1| = |g(x_1) - g(x_0)|.$$

Om nu $g$ är en fkn sådan att

$$|g(z) - g(y)| \leq L|z - y|,$$

för alla möjliga $z, y$ med $\boxed{L < 1}$ så blir svaret ja, vilket leder till konvergens!



# Funktioner m.m.

Har sökt lösn $\bar{x}$ till $f(x) = 0$ med *bisektion*, och till $g(x) = x$ med *fixpunktsiteration*, dvs

$$x_{j+1} = g(x_j).$$

Har också noterat att $g(x) = x$ kan skrivas $f(x) = 0$, t.ex. med $f(x) = g(x) - x$, och omvänt att $f(x) = 0$ kan skrivas $g(x) = x$, t.ex. med $g(x) = x + \alpha\, f(x)$, $\alpha \neq 0$.

Ekvationen $g(x) = x$ uppkommer ofta naturligt:



# Funktioner m.m.

**Exempel** Du säljer jultidningar för $x$ (tusen) kr. Förlaget tar $25\%$, plus $250:-$ i fast avgift. Hur mycket måste du sälja för att nå "break even"? Jo, så att

$$\text{inkomsten} = x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = \text{kostnaderna},$$

dvs $x = \frac{1}{3} = 0.333...$ (tusen) kr.



# Funktioner m.m.

Vad ger fixpunktsiteration i detta fall? Tar $x_0 = 0$ som exempel. Får

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = \tfrac{1}{4}x_0 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}, \\
x_2 &= g(x_1) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}, \\
x_3 &= g(x_2) = \tfrac{1}{4}\,(\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} = (\tfrac{1}{4})^3 + (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}, \\
&.. \\
x_j &= (\tfrac{1}{4})^j + (\tfrac{1}{4})^{j-1} + ... + (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

S.k. *geometrisk summa* eller dito *serie*.

# Funktioner m.m.

Allmänt: $s = a + a^2 + a^3 + .. + a^{j-1} + a^j$ beräknas genom multiplikation med $1 - a$:

$$\begin{aligned}(1-a)\,s &= (1-a)\,(a + a^2 + .. + a^j)\\ &= a + a^2 + .. + a^j\\ &-a^2 - a^3 - .. - a^j - a^{j+1} = a - a^{j+1},\end{aligned}$$

dvs

$$s = \frac{a - a^{j+1}}{1-a}, \quad \text{för } a \neq 1.$$

Analogt: $s = a^i + a^{i+1} + .. + a^j = \frac{a^i - a^{j+1}}{1-a}$.



# Funktioner m.m.

För fixpunktiteration ovan gäller alltså :

$$x_j = \frac{1/4 - (1/4)^{j+1}}{1 - 1/4} = \frac{1 - (1/4)^j}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^j \to \frac{1}{3},$$

då $j \to \infty$.

Säger att *följden* $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ *konvergent* med *gränsvärdet* $\bar{x} = 1/3$:

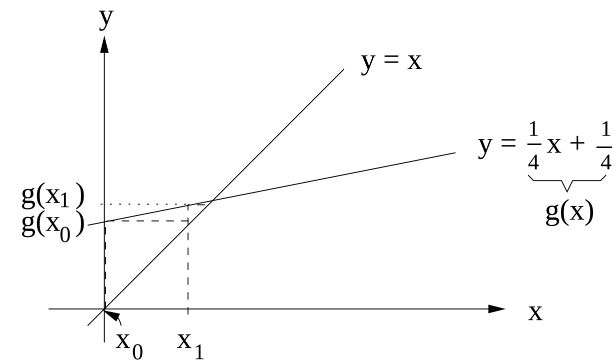
$$\lim_{j\to\infty} x_j = \bar{x} = 1/3,$$

och har redan noterat att gränsvärdet $\bar{x} = 1/3$ löser den givna ekvationen $g(x) = x$.



# Funktioner m.m.

“Geometriskt” har följande hänt:

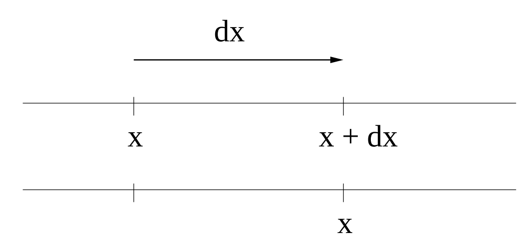





# Funktioner m.m.

```
function x = MyFixedP(g, x, tol)

...
while abs(dx) > tol
...
dx = ...
x = x + dx;
...
end
```



# Funktioner m.m.

Supply

- comments
- data checks
- non-convergence auto-stop
- system version
- g as sting/eval or as function
- testing, double root
- applications



# Funktioner m.m.

Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\bar{x} = 1/3$ ty

$$|x_j - \bar{x}| = \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^j \leq 10^{-j/2},$$

dvs $x_j$ kan fås att överensstämma med $\bar{x}$ med godtyckligt många decimaler, genom att ta $j$ tillräckligt stort. Brukar uttryckas: Till godtyckligt litet $\epsilon > 0$ finns $N$ s.a.

$$|x_j - \bar{x}| \leq \epsilon \quad \text{om bara } j \geq N.$$



# Funktioner m.m.

Kan man veta om en följd är konvergent utan att känna $\bar{x}$, dvs dess ev. gränsvärde?

<u>Defintion</u> En följd $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ är en *Cauchy följd* om till godt. litet $\epsilon > 0$ finns $N$ s.a.

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon \quad \text{om bara } i \& j \geq N.$$



# Funktioner m.m.

En konvergent följd måste vara Cauchy, ty givet $\epsilon > 0$ kan vi då hitta $N$ s.a.

$$|x_i - x_j| \leq |x_i - \bar{x}| + |x_j - \bar{x}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

för $i, j \geq N$. Har här utnyttjat *triangelolikheten* (för rationella tal).

# Funktioner m.m.

Omvänt definierar en Cauchyföljd en entydigt bestämd decimalutveckling, ty om t.ex. vi tar $\epsilon = 10^{-7}$ så finns $N$ s.a. alla talen $x_i$ och $x_j$ med $i, j \geq N$ skiljer sig åt först i 7:e decimalen, och om vi tar $\epsilon = 10^{-50}$ så finns $N$ (gissningsvis större än det förra) s.a. $x_i$, $x_j$ med $i, j \geq N$ alla överensstämmer i de 50 första decimalerna, osv.



# Funktioner m.m.

Åter till bisektionsalg. applicerad på ekv. $f(x) = x^2 - 2 = 0$, vilken med $x_0 = 1$, $X_0 = 2$ genererar följd av intervall $[x_j, X_j]$ mer $X_j - x_j = 2^{-j}$ och $[x_{j+1}, X_{j+1}] \subset [x_j, X_j]$ ($\subset$ delmängd av/innehållet i). Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ bildar då en Cauchyföljd, ty för $i \geq j$ gäller ju $x_i \in [x_j, X_j]$ och därmed

$$|x_i - x_j| \leq 2^{-j},$$

dvs givet $\epsilon > 0$ finns $N$ s.a.

$$|x_i - x_j| \leq \epsilon \quad \text{om bara } i, j \text{ tillr. stora } (\geq N).$$

Men då måste följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ vara konvergent och ha ett (rationellt eller irrationellt) gränsvärde $\bar{x}$.



# Funktioner m.m.

Men vet vi nu att detta $\bar{x}$ löser den givna ekvationen, dvs att

$$f(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 2 = 0 \quad ?$$

Notera att vi inte kan beräkna $\bar{x}^2$ t.ex. för irrationalla $\bar{x}$. Vi löser problemet genom att helt enkelt *definiera*

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{j\to\infty} x_j) = \lim_{j\to\infty} f(x_j),$$

om detta är "möjligt", dvs om följden $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ visar sig konvergent så att den har ett gränsvärde

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j).$$

Noterar att $f(x_j)$ är väldefinierat rationellt tal. Alltså gäller det nu bara att visa att $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ är en Cauchyföljd.



# Funktioner m.m.

Men för funktionen $f$ och alla $x, y \in Q$ med $1 \leq x, y \leq 2$ gäller

$$(L) \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

med $L = 4$, ty

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - 2 - (y^2 - 2)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)\,(x - y)|$$
$$= |x + y|\,|x - y| \leq 4\,|x - y|,$$

dvs (L) gäller med $L$ högst 4. Men härav följer att

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq 4|x_i - x_j| \leq \epsilon$$

om bara $i, j$ tillr. stora, dvs $\{f(x_j)\}$ Cauchyföljd ty $\{x_j\}$ Cauchyföljd & $f$ *Lipschitskontinuerlig* (uppfyller (L)).

# Funktioner m.m.

**Sats** Om $f$ Lipschitzkontinuerlig på $[x_0, X_0]$ och $f(x_0)\, f(X_0) < 0$ så konvergerar följden $\{x_j\}$ i bisektionsalgoritmen mot en *rot* $\bar{x}$ till $f(x) = 0$, dvs s.a. $f(\bar{x}) = 0$.



# Funktioner m.m.

Har sett hur bisektion tillämpad på ekv $f(x) = x^2 - 2 = 0$ (med t.ex. $x_0 = 1$ och $X_0 = 2$) ger en *följd* $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ och en följd $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$, s.a.

$$(*) \qquad f(x_j) = x_j^2 - 2 < 0 < X_j^2 - 2 = f(X_j).$$

Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ (liksom $\{X_j\}_{j=0}^{\infty}$) är en Cauchy följd, vilken definierar ett entydigt bestämt (rationellt eller irrationallt) reellt tal $\bar{x}$ med

$$\lim_{j\to\infty} = \bar{x}.$$



# Funktioner m.m.

Ställde frågan: Löser detta $\bar{x}$ den givna ekv., dvs gäller

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{j\to\infty} x_j) = 0 \quad ?$$

Eftersom funk. $f(x) = x^2 - 2$ fanns vara Lipschitz kontinuerlig i det aktuella intervallet $[1, 2]$, dvs s.a.

$$|f(a) - f(b)| \le L|a - b| \quad \text{för alla } a, b \text{ i } [1, 2],$$

med $L = 4$, följer att även följden $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$ av motsvarande funktionsvärden är Cauchy. Vi kan därför *definiera*

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{j\to\infty} x_j) = \lim_{j\to\infty} f(x_j),$$

dvs vi har lyckats ge mening åt $f(\bar{x})$. Nu återstår att kolla att $f(\bar{x}) = 0$, dvs att



# Funktioner m.m.

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) \overset{?}{=} 0.$$

Men enl. (*) har vi

$$|f(x_j) - 0| = |x_j^2 - 2 - 0| \le |x_j^2 - 2 - (X_j^2 - 2)| = |x_j^2 - X_j^2|$$
$$|(x_j + X_j)\,(x_j - X_j)| \le 4\,|x_j - X_j| = 4\,2^{-j} \le \epsilon,$$

för godtyckligt litet $\epsilon > 0$, om bara $j$ tillr. stort, dvs

$$f(x_j) \to 0 \quad \text{då } j \to \infty,$$

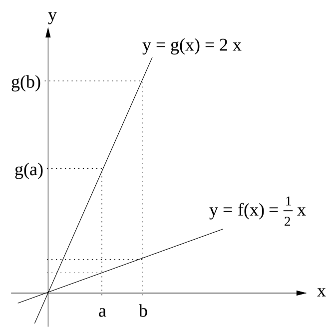
eller

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0.\text{QED}$$

# Funktioner m.m.

## Lipschitz kontinuitet

**Exempel** Linjära funktioner är Lipschitz kontinuerliga:






# Funktioner m.m.

I exemplet:

$$|f(a)-f(b)| \le \tfrac{1}{2}\,|a-b|, \quad L = 1/2,$$
$$|g(a)-g(b)| \le 2\,|a-b|, \quad L = 2.$$

Mera allmänt: $f(x) = k\,x + l$ Lipschitz kont. med $L = |k|$.



# Funktioner m.m.

**Exempel** Har redan visat att $f(x) = x^2 - 2$ är Lipschitz kont. på $[1,2]$ med $L = 4$.

**Exempel** $f(x) = x^3$ är Lipschitz kont. på $[-c,c]$ med $L = 3\,c^2$, ty

$$|f(a)-f(b)| = |a^3-b^3| = |(a^2+a\,b+b^2)\,(a-b)|$$
$$\le (|a^2|+|a|\,|b|+|b^2|)\,|a-b| \le 3\,c^2\,|a-b|.$$



# Funktioner m.m.

**Exempel** Polynom $f(x) = a_0 + a_1\,x + .., + a_n\,x^n$ är Lipschitz kont. på begränsade intervall $[-c,c]$ (för givna rationella coefficienter $a_j$).

**Exempel** Funktionen $f(x) = |x|$ är Lipschitz med $L = 1$:

$$|\,|a|-|b|\,| \le |a-b|.$$

T.ex. gäller om $|a| < |b|$:

$$|b| \le |a+b-a| \le |a| + |b-a|,$$

dvs

$$|\,|a|-|b|\,| = |b|-|a| \le |b-a| = |a-b|.$$

# Funktioner m.m.

Enl. ovan har vi för Lipschitz kontinuerliga funktioner $f(x)$ kunnat ge mening åt $f(\bar{x})$ även för irrationella $\bar{x}$. Speciellt kan vi då ge mening åt sånt som $2 \cdot \sqrt{2}$ och $\pi^3$, eftersom $f(x) = 2x$ är Lipschitz, liksom $g(x) = x^3$ på begränsade intervall, som t.ex. $[0, 4]$ innehållande det irrantionella talet $\pi = 3.14159...$ (som figurerar i vårt allra första exempel i formen $2\,\pi \approx 6.28$).



# Funktioner m.m.

Men hur beräknar man då sådant som involverar mer än ett irrationellt tal, som t.ex. $\sqrt{2}\,\pi$?
Det visar sig att nyckeln till ett svar på sådana frågor är att betrakta funktioner av *flera variabler*, i det aktuella fallet vill vi för irrationella tal $\bar{x}$ och $\bar{y}$ kunna beräkna

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\text{lim} x_j, \text{lim} y_j) = \text{lim} x_j \, \text{lim} y_j = \bar{x}\,\bar{y}.$$



# Funktioner m.m.

Vi definerar som för en Lipschitz kontinuerlig funktion av en variabel:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\text{lim} x_j, \text{lim} y_j) = \text{lim}_{j\to\infty} f(x_j, y_j).$$

Som tidigare är detta ok om $\{f(x_j, y_j)\}$ bildar en Cauchyföljd. Vi undersöker därför om $f$ Lipschitz, dvs om

$$|f(a_1, a_2) - f(b_1, b_2)| \le L(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|),$$

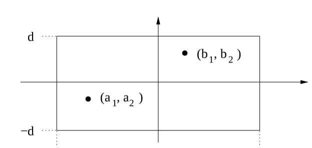
för alla aktuella $a = (a_1, a_2)$ och $b = (b_1, b_2)$.



# Funktioner m.m.

För $f(x, y) = x\,y$ finner vi att

$$\begin{aligned}
&|f(a_1, a_2) - f(b_1, b_2)| = |a_1\,a_2 - b_1\,b_2| \\
&= |a_1\,a_2 \underbrace{-a_2\,b_1 + a_2\,b_1}_{=0} - b_1\,b_2| \\
&= |a_2\,(a_1 - b_1) + b_1\,(a_2 - b_2)| \le |a_2|\,|a_1 - b_1| + |b_1|\,|a_2 - b_2| \\
&\le d\,|a_1 - b_1| + c\,|a_2 - b_2| \le \underbrace{\text{max}(c, d)}_{=:L}\,(|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)
\end{aligned}$$



# Funktioner m.m.

Byt nu $(a_1, a_2)$ mot $(x_i, y_i)$ och $(b_1, b_2)$ mot $(x_j, y_j)$, och det följer att

$$|f(x_i, y_i) - f(x_j, y_j)| \leq L\,(|x_i - x_j| + |y_i - y_j|) \leq \epsilon,$$

för godtyckligt litet $\epsilon > 0$ om bara $i, j$ tillr. stora, dvs $\{x_j\, y_j\}$ är en Cauchyföljd.

| $x_j$ | $y_j$ | $x_j\ y_j$ |
|---|---|---|
| 3.1 | 1.4 | 4.34 |
| 3.14 | 1.41 | 4.4274 |
| 3.141 | 1.414 | 4.441374 |
| 3.1415 | 1.4142 | 4.4427093 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\pi$ | $\sqrt{2}$ | $\pi\ \sqrt{2}$ |



# Funktioner m.m.

**Funktionen $f(x) = x^r$**

Vill här för $r = p/q$ rationellt med $p, q > 0$ och $x \geq 0$ definera $f(x) = x^r$.

**Exempel** $f(x) = x^{1/2}$. Definierar $y = f(x) = x^{1/2}$ som den entydigt bestämda lösningen $\bar{y} \geq 0$ till $y^2 = x$ (eller $g(y) = y^2 - x = 0$). Har sett att sådan lösning finns för $x = 2$. Analogt för andra rationella $x \geq 0$. Entydigheten följer av att $g(y) = y^2$ är *strängt växande* med växande $y \geq 0$, dvs $0 \leq y_1 < y_2 \Leftrightarrow g(y_1) = y_1^2 < y_2^2 = g(y_2)$, dvs två olika $y$-värden $\geq 0$ kan ej ha samma kvadrat.

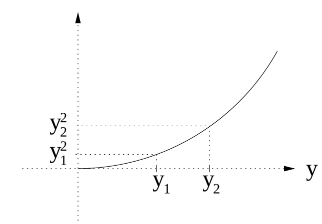


# Funktioner m.m.

Implikationen följer av att

$$y_2^2 - y_1^2 = \underbrace{(y_2 + y_1)}_{>0}\,\underbrace{(y_2 - y_1)}_{>0} > 0,$$

för $0 \leq y_1 < y_2$






# Funktioner m.m.

För allmänt $r = p/q$, $p, q > 0$ definieras $y = x^r = x^{p/q}$ som lösningen $\bar{y} > 0$ till

$$y^q = x^p.$$

Detta definierar $f(x) = x^r : Q_+ \to R_+$ vilken sedan kan utvidgas till $f(x) = x^r : R_+ \to R_+$ genom

$$f(\bar{x}) = \lim_{j \to \infty} f(x_j)$$

som tidigare!

# Funktioner m.m.

**Potenslagarna:** Har för $x > 0$, $y > 0$ och rationella $r = p/q$ och $u = s/t$ (som för heltalspotenser) att

- $x^r\, x^u = x^{r+u}$
- $x^r\, y^r = (x\, y)^r$
- $(x^r)^u = x^{r\, u}$



# Funktioner m.m.

**Bevis av potenslagarna:**

$$x^r\, y^r = (xy)^r$$

Sätt $v = x^r = x^{p/q}$ och $w = y^r = y^{p/q}$, dvs $v^q = x^p$ och $w^q = y^p$. Ledvis multiplikation ger att

$$\underbrace{v^q\, w^q}_{=(v\,w)^q} = \underbrace{x^p\, y^p}_{=(x\,y)^p},$$

dvs

$$v\, w = (x\, y)^{\frac{p}{q}} = (x\, y)^r,$$

QED.



# Funktioner m.m.

**Bevis av potenslagarna:**

$$(x^r)^u = x^{r\, u}.$$

Sätt $v = x^r$ och $w = v^u$, dvs $v^q = x^p$ och $w^t = v^s$. Härav

$$w^{q\, t} = (w^t)^q = (v^s)^q = v^{s\, q} = (v^q)^s = (x^p)^s = x^{p\, s},$$

dvs

$$w = x^{\frac{p\, s}{q\, t}} = x^{r\, u},$$

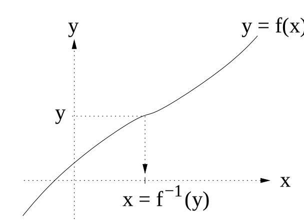
QED.

**Övning:** Bevisa den återstående potenslagen.



# Funktioner m.m.

**Invers funktion**
Om till varje $y$ finns ett entydigt bestämt $x$ sådant att $f(x) = y$ så betecknas detta $x$ även $f^{-1}(y)$, dvs om $x$ entydigt bestäms ax $y$ på detta sätt kan kan $x$ ses som värdet av en *funktion* av $y$ betecknad $f^{-1}(y)$, dvs $x = f^{-1}(y)$.



# Funktioner m.m.

**När funkar fixpunktsiteration?**
Låt $g$ vara en *kontraktion*, dvs en funktion sådan att

$$|g(a) - g(b)| \leq L|a - b|$$

för alla $a$ och $b$, för något $L < 1$.

Söker $\bar{x}$ sådant att $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

Genererar *följd*

$$x_0, x_1, x_2, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..$$

sådan att $g(x_k) =: x_{k+1}$. Visar att följden är en *Cauchy följd*.



# Funktioner m.m.

Har att

$$|x_j - x_{j+1}| = |g(x_{j-1}) - g(x_j)| \leq L|x_{j-1} - x_j|$$

$$\leq L(L|x_{j-2} - x_{j-1}|) \leq .. \leq L^j|x_0 - x_1|.$$

Analogt

$$|x_{j+1} - x_{j+2}| \leq L^{j+1}|x_0 - x_1|,$$

o.s.v. Dvs

$$|x_j - x_i| \leq |x_j - x_{j+1}| + |x_{j+1} - x_{j+2}| + .. + |x_{i-1} - x_i|$$

$$\leq (L^j + L^{j+1} + .. + L^{i-1})|x_0 - x_1| = \frac{L^j - L^i}{1 - L}|x_0 - x_1| \leq \frac{L^j}{1 - L}|x_0 - x_1|.$$



# Funktioner m.m.

Alltså är följden $\{x_j\}$ konvergent med ett *gränsvärde* $\bar{x}$.

Återstår att visa att $g(\bar{x}) = \bar{x}$. Men

$$g(\bar{x}) = g(\lim x_j) = \lim g(x_j) = \lim x_{j+1} = \bar{x}.$$

QED



# Funktioner m.m.

**Kan det finnas flera fixpunkter?**
Nej, ty antag att både $a$ och $b$ är fixpunkter, dvs att $g(a) = a$ och $g(b) = b$. Då

$$|a - b| = |g(a) - g(b)| \leq L|a - b|,$$

vilket endast är möjligt om $a = b$ ty $L < 1$. Dvs det kan inte finnas två (olika) fixpunkter!

# Funktioner m.m.

Har nu bevisat följande:
En kontraktion $g : R \to R$ har en entydigt bestämd fixpunkt $\bar{x}$, vilken kan beräknas med iterationsmetoden $g(x_j) =: x_{j+1}$.



# Funktioner m.m.

Resultatet kan generaliseras till det fall $g$ är en kontraktion på ett givet intervall $[a, b]$, dvs avbildar alla $x$ i $[a, b]$ på $g(x)$-värden i samma intervall, och sådan att $g$ är Lipschitzkontinuerlig med $L < 1$ på intervallet. Då finns ett entydigt bestämt $\bar{x}$ i intervallet sådant att $g(\bar{x}) = \bar{x}$.