TMV035 Analys och linjär algebra K/Kf/Bt, del a, 2002-10-23
Lösningar:

==

Uppgift 1

a) En metod för att hitta nollställen till en given funktion $f(x)$, dvs x sådana att $f(x) = 0$.
Söker först intervall $[x_0\, X_0]$ på vilket $f(x)$ teckenväxlar, dvs s.a. $f(x_0)\, f(X_0) < 0$. Givet ett intervall $[x_j\, X_j]$ på vilket f teckenväxlar beräknas $f((x_j + X_j)/2)$, dvs värdet i intervallets mittpunkt, varefter $[x_{j+1}\, X_{j+1}]$ väljs som den halva av $[x_j\, X_j]$ där f teckenväxlar. Iterationsprocessen fortsätter till dess ett mittpunktsvärde är $= 0$ eller till dess det resterande intervallet $[x_j\, X_j]$ innehållande sökt x nått försumbar längd.
(b) För den givna funktionen med $[x_0\, X_0] = [0\, 1]$ erhålls $[x_1\, X_1] = [0\, .5]$, $[x_2\, X_2] = [.25\, .5]$, $[x_3\, X_3] = [.25\, .375]$ osv. Metoden funkar såtillvida att de erhållna intervallen ger konvergens mot $\bar{x} = 1/3$, vilket dock inte är ett nollställe till den givna funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{för } x \leq 1/3 \\ 1 & \text{för } x > 1/3, \end{cases}$$

så i detta avseende funkar metoden inte i detta fall.
(c) Om den givna funktionen är Lipschitzkontinuerlig (vilket inte är fallet i (b)) och teckenväxlar på ett givet intervall så ger metoden konvergens mot en lösning till $f(x) = 0$.
Konvergensen är linjär ty $|x_{j+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|x_j - \bar{x}|$.
Jo, man *har* denna x-konvergens även i (b) men tyvärr finns ingen Lipschitzkontinuitet som kan ge $|f(x_j)| \to 0$, dvs man har ingen motsvarande $f(x)$-konvergens mot 0.

Uppgift 2

(a) Determinanten av 2×2-matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ges av $a\,d - b\,c$.
(b) Om den givna 3×3-matrisens determinant utvecklas efter första rad fås

$$(1-\lambda)\ \underbrace{\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}}_{=\,(2-\lambda)^2+1} - 0\ \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}}_{=\,0} + 1\ \underbrace{\det\begin{bmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\,0}$$

dvs $(1-\lambda)((2-\lambda)^2 + 1)$. För $\lambda = 0$ blir determinanten alltså $= 5$.
(c) Determinanten blir uppenbarligen $= 0$ för $\lambda = 1$ och för $2 - \lambda^2 = -1$, dvs för $\lambda = 2 - i$ och $\lambda = 2 + i$.

Uppgift 3

(a) Ställer upp "normalekvationerna", dvs multiplicerar $A\,x = b$ med A^T i båda led, vilket ger

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b},$$

dvs

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix}}_{A^T\,A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}_{A^T\,b}$$

med lösning $x = [5/3\ 2/3]^T$.
(b) Det sökta planet kan skrivas som $x = s\,(2,\,0,\,-1) + t\,(-1,\,2,\,3)$ eller som $n \cdot x = 0$ med n en normalvektor till planet, t.ex. $n = (2,\,-5,\,4)$ som erhållits genom att kryssprodukta de båda kolonnerna i A, dvs som $2\,x_1 - 5\,x_2 + 4\,x_3 = 0$.
(c) b's projektion på normalen $n = (2,\,-5,\,4)$ ges av

$(4,\,-2,\,3)\cdot(2,\,-5,\,4)\,/\,|(2,\,-5,\,4)|^2\ (2,\,-5,\,4) = 30/45\ (2,\,-5,\,4) = 2/3\,(2,\,-5,\,4)$.

Uppgift 4

(a) Har med $m = 1/\bar{x}$ och $k = -1/\bar{x}^2$ att $E = 1/x - (1/\bar{x} + (-1/\bar{x}^2)\,(x - \bar{x})) = (1/\bar{x}^2 - 1/(x\bar{x}))\,(x - \bar{x}) = 1/(x\bar{x}^2)\,(x - \bar{x})^2$, dvs $|E| \le K\,|x - \bar{x}|^2$ för x nära $\bar{x}$, t.ex. med $K = 2/\bar{x}^3$, som ju är oberoende av x, om bara $\bar{x} \ne 0$.
(b) $D\,f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$. Speciellt (enl a)) $D\,\frac{1}{g(x)} = \frac{-1}{(g(x))^2}\,g'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$.
(c) $D\frac{f}{g} = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$, ty $D\frac{f}{g} = D\,(f\,\frac{1}{g}) = f'\,\frac{1}{g} + f\,\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$, enligt regel för derivering av produkter.

Uppgift 5

(a) Söker lösning till ekvationerna $f = x^2 - 2\,x - y - 3 = 0$ och $g = x\,y^2 - 1 = 0$ med derivatorna $f'_x = 2\,x - 2$, $f'_y = -1$, $g'_x = y^2$ och $g'_y = 2\,x\,y$. Enligt Newtons metod söker vi lösningen till

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{dvs} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -2/3 \end{bmatrix},$$

vilket för oss till punkten

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Den sökta ekvationen för tangentplanet blir

$z = f(2,\,1) + f'_x(2,\,1)\,(x - 2) + f'(2,\,1)\,(y - 1) = -4 + 2\,(x - 2) + (-1)\,(y - 1)$

dvs $z = 2\,x - y - 7$, eller $2\,x - y - z = 7$ om man så vill.
(c) Funkar inte att starta i origo ty skulle då behöva lösa

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som saknar lösning (andra ekvationen är ju $0\,a + 0\,b = -1$).