TMV035 Analys och linjär algebra K/Kf/Bt, del a, 2002-10-23
Hjälpmedel: Endast penna, radergummi och linjal.
Telefonjour/rond: Tobias Gebäck, tel. 0740-459022. Fråga gärna!

Varje uppgift kan ge max 10 poäng. För godkänt krävs 25 poäng.

==

Uppgift 1

(a) Vad är bisektion, dvs vad är syftet med metoden och hur går den till? Beskriv algoritmen i ord eller m.h.a. matlabkod.
(b) Tillämpa bisektionsalgoritmen på funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{för } x \leq 1/3 \\ 1 & \text{för } x > 1/3 \end{cases}$$

utgående från intervallet [0 1]. På vilket sätt fungerar algoritmen, och på vilket sätt fungerar den inte?
(c) Under vilka förutsättningar tjänar algoritmen sitt syfte, vilken typ av konvergens (linjär eller kvadratisk) ger den, och vad är innebörden i detta? Har man inte denna typ av konvergens i (b) ?

Uppgift 2

(a) Hur beräknas *determinanten* till 2×2-matrisen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, och vilken geometrisk tolkning kan den ges?

(b) Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$. Beräkna $\det A$ för $\lambda = 0$.

(c) För vilka (3) värden på λ får determinanten av matrisen A i (b) värdet 0?

Uppgift 3

(a) Bestäm med minsta kvadratmetoden en (approximativ) lösning till ekvationssystemet $Ax = b$ med

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestäm ekvationen för det plan (genom origo) som spänns upp av kolonnerna i A.
(c) Bestäm b's projektion på *normalen* till detta plan.
Tips: Normalen kan antingen "kryssproduktas" fram, eller fås genom att helt enkelt söka en vektor $n = [a, b, c]$ som är ortogonal mot de två kolonnerna i A.

Uppgift 4

(a) Verifiera att funktionen $f(x) = 1/x$ låter sig lineariseras, dvs approximeras med en linjär funktion $m + k(x - \bar{x})$ med ett fel E sådant att $|E| \leq K\,|x - \bar{x}|^2$

med K oberoende av x för x nära $\bar{x}$, med lämpligt val av m och $k = -1/\bar{x}^2$.
(b) Hur deriveras en *sammansatt* funktion $f(g(x))$, och vad ger denna formel i specialfallet $f(y) = 1/y$, dvs för derivatan av $1/g(x)$?
(c) Härled deriveringsregeln för en kvot $\frac{f(x)}{g(x)}$ mellan två funktioner f och g från regeln för produktderivering och specialfallet i (b) ?

Uppgift 5

(a) Tillämpa Newtons metod på systemet $\begin{cases} x^2 - 2\,x - y - 3 = 0 \\ x\,y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ utgående från punkten $(2, 1)$. Genomför en iteration.
(b) Ange ekvationen för tangentplanet till ytan $z = x^2 - 2\,x - y - 3$ i startpunkten $(2, 1)$.
(c) Skulle det funka att ta origo som startpunkt i (a) ? Varför/varför inte?

Lycka till ! / K.E.