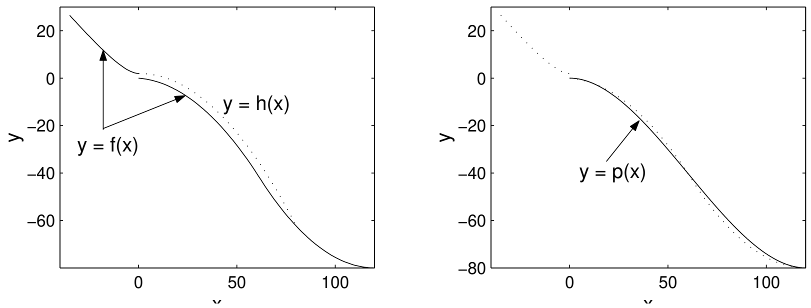
TMA196 Analys och linjär algebra K/Kb/Kf, del a, 2002-01-17
Hjälpmedel: Endast penna, radergummi och linjal.
Telefonjour/rond: Niklas Broberg, tel. 0740-350646. Fråga gärna!

Varje uppgift kan ge max 10 poäng. För godkänt krävs 25 poäng.

==

Grafen $y = f(x)$ i figuren beskriver en hoppbacke (och $y = h(x)$ ett hopp), där

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^2/(15 - x) & \text{för } -35 \le x \le 0 \\ -x/15 - x^2/100 & \text{för } \quad 0 < x \le 60 \\ -80 + 40(x - 120)^2/60^2 & \text{för } \quad 60 < x \le 120 \end{cases}$$



Uppgift 1

a) Definiera begreppet Lipschitz kontinuitet.
b) Är funktionen $f(x)$ i figuren Lipschitzkontinuerlig på $[-35, 120]$? Ta ledning av figuren och motivera utgående från definitionen i a).

Uppgift 2

En backhoppare startar från en viss punkt (x, y) i överbacken, utan fart men med lägesenergin $20mg$, där m (kg) är hopparens massa, $g \approx 9.81$ (m/s^2) gravitationskonstanten, och 20 (m) är höjden i förhållande till uthoppspunkten på nivån $y = 2$.
a) Bestäm startpunkten (x, y).
Vid uthoppet har hopparen (på vällvallade skidor) lyckats omvandla hela lägesenergin $20mg$ till rörelseenergin $mv^2/2$, där v är uthoppshastigheten.
b) Beskriv en metod (t.ex. Bisektion) för att beräkna v.
c) Verifiera att närmevärdet $g = 10$ (m/s^2) ger $v = 20$ (m/s).
Hopparens x och y koordinat t sekunder efter uthopp ges sedan av $x = vt$ resp $y = 2 - gt^2/2$, där $v = 20$ (enl. c)) och $g = 8$, en något modifierad gravitationskonstant med hänsyn till den uppåtriktade kraften från "luftkudden" under hopparen under själva hoppet.
d) Hur många sekunder varar själva hoppet, och var i underbacken tar hopparen

mark? Faktiska svar behöver ej beräknas men ställ upp de ekvationer som ger lösningen. Tips: får antas att hoppet är längre än 60 (m).

Uppgift 3

a) Vilken lutning (derivata) har "hoppbanan" vid nedslaget och
b) vilken lutning (derivata) har backen i den punkt hopparen tar mark,
om som i figuren detta sker där $x = 80$. (Dessa två derivator bör inte vara alltför olika för att hopparen skall överleva nedslaget.)
c) Hur kan man beräkna hur många graders riktningsändring hopparen gör just i nedslaget? Tips: kanske kan tangentvektorer a och b för hoppbana resp backe i nedslagspunkten, samt sambandet mellan vektorernas skalärprodukt $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2$ och deras mellanliggande vinkel ge nåt. En tangentvektor till en kurva $y = f(x)$ kan erhållas från två godtyckliga punkter på tangenten till kurvan, som ju involverar en given punkt $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, med $\bar{x} = 80$ i vårt fall, och andra punkter (x, y), där x kan väljas godtyckligt (t.ex. som $\bar{x} + 1$), och med y-koordinat given av tangentens ekvation $y = f(\bar{x}) + \ldots$ Fyll i de detaljer som fattas! Vinkelvärdet behöver dock inte beräknas, eftersom detta involverar rotdragningar och cosinusfunktionens invers, dvs kräver iterativ ekvationslösning ej lämplig för handräkning.

Uppgift 4

a) I den högra figuren visas en alternativ modell $y = p(x)$ av underbacken, med $p(x)$ ett tredjegradspolynom, något flackare än den ursprungliga (streckade) modellen. Ange formeln för detta polynom $p(x)$ som karaktäriseras av att $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$, $p(120) = -80$ och $p'(120) = 0$.
b) Var (för vilket x) är den nya underbacken som brantast? Tips: derivera derivatan.
c) Enligt en annan modell beskrivs underbacken av $y = -ax^2/(b + x^2)$, där a och b är konstanter, och där $0 < x < \infty$! Bestäm a och b så att denna backe får samma totala fallhöjd som de andra, dvs 120 (m), och liksom de andra går genom punkten $(60, -40)$.

Uppgift 5

Vad menas med a) en fixpunkt för en given funktion $g(x)$, b) fixpunktsiteration, och c) under vilka förutsättningar konvergerar fixpunktsiteration?
d) Skissera ett bevis av konvergensen i 5c.

Lycka till !!/KE