TMA196 Analys och linjär algebra K/Kb/Kf, del a, 2001-10-24

==

Uppgift 1

a) $2a - b = 2\,(2,\,3) - (4,\,5) = (4,\,6) - (4,\,5) = (0,\,1)$
b) $P_a(b) = \lambda\, a$ där $\lambda = a \cdot b/|a|^2 = (2,\,3)\cdot(4,\,5)/(2^2+3^2) = (8+15)/13 = 23/15$,
dvs $P_a(b) = \frac{23}{13}\,(2,\,3) = (46/13,\,69/13)$
c) $a \times b = (2,\,3) \times (4,\,5) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$
d) $a/b = a\bar{b}/|b|^2 = (2,\,3)(4,\,-5)/(4^2+5^2) = (2\cdot 4 - 3\cdot(-5),\,2\cdot(-5)+3\cdot 4)/41 =$
$(23,\,2)/41 = (23/41,\,2/41)$
e) $x = a + s\,b^{\perp}$, dvs $(x_1,\,x_2) = (2,\,3) + s\,(-5,\,4)$, $s \in R$, alternativt $b \cdot x = b \cdot a$,
dvs $(4,\,5)\cdot(x_1,\,x_2) = (4,\,5)\cdot(2,\,3) = 23$, dvs $4\,x_1 + 5\,x_2 = 23$.

Uppgift 2

a) $y = x^r$, för $r = p/q$ rationellt, är den positiva lösningen $\bar{y} > 0$ till $y^q = x^p$.
b) Bevisar att $x^{r_1}\,x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$: Sätter $y_1 = x^{r_1}$ och $y_2 = x^{r_2}$ och har att $y_1^{q_1} = x^{p_1}$ och $y_2^{q_2} = x^{p_2}$. Detta ger, enligt potenslagar för heltalspotenser, $y_1^{q_1 q_2} = (y_1^{q_1})^{q_2} = (x^{p_1})^{q_2} = x^{p_1 q_2}$ och $y_2^{q_2 q_1} = (y_2^{q_2})^{q_1} = (x^{p_2})^{q_1} = x^{p_2 q_1}$.
Produkten av vänsterleden ger

$$(y_1 y_2)^{q_1 q_2} = y_1^{q_1 q_2} y_2^{q_1 q_2} = x^{p_1 q_2} x^{p_2 q_1} = x^{p_1 q_2 + p_2 q_1},$$

dvs $y_1 y_2 = x^{\frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}} = x^{\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}} = x^{r_1 + r_2}$, vilket skulle visas.

Uppgift 3

a) Har att $x^3 + 4\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow x\,(x^2 + 4) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x^2+4}$, vilket skulle visas.
b) Eftersom $f(0) = -1 < 0$ och $f(1) = 4 > 0$ och $f(x)$ är Lipschitskontinuerlig på intervallet $[0,1]$ gäller enligt Bolzanos sats att det finns en lösning $\bar{x} \in [0,1]$ till $f(x) = 0$. Att $f(x)$ är Lipschitskontinuerlig ges av

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |a^3 + 4\,a - 1 - (b^3 + 4\,b - 1)| = |a^3 - b^3 + 4\,(a-b)| \\ &= |(a^2 + a\,b + b^2 + 4)(a-b)| = |a^2 + a\,b + b^2 + 4|\,|a-b| \le 7\,|a-b| \end{aligned}$$

för $a, b \in [0,1]$.
Alternativt finns enligt kontraktionsavbildningssatsen ett $\bar{x}$ som löser den andra ekvationen ty $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$ är en kontraktion.
c) Entydigheten följer av att $f(x)$ är strängt växande, dvs för $x_2 > x_1$ gäller $f(x_2) = x_2^3 + 4\,x_2 - 1 > x_1^3 + 4\,x_1 - 1 = f(x_1)$, ty $x_2^3 > x_1^3$ och $4\,x_2 > 4\,x_1$.
d) 3 st. (varav en reell).

Uppgift 4

a) Kalkylen

$$x^3 = (\bar{x} + (x - \bar{x}))^3 = \bar{x}^3 + 3\,\bar{x}^2\,(x - \bar{x}) + 3\,\bar{x}\,(x-\bar{x})^2 + (x-\bar{x})^3.$$

säger att $f(x) = x^3$ kan lineariseras, dvs approximeras med den linjära funktionen $\bar{x}^3 + 3\,\bar{x}^2\,(x - \bar{x})$ med ett fel som är kvadratiskt litet för x nära $\bar{x}$, eftersom $|3\,\bar{x}\,(x-\bar{x})^2 + (x-\bar{x})^3| \le K\,|x-\bar{x}|^2$ med $K = 3\,|\bar{x}| + 1$ för x nära $\bar{x}$.

Derivatan är alltså $f'(\bar{x}) = 3\,\bar{x}^2$ och tangentens ekvation är $y = \bar{x}^3 + 3\,\bar{x}^2\,(x - \bar{x})$, dvs $y = 1 + 3\,(x-1)$ för $\bar{x} = 1$.
b) $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$. För härledning, se bok eller föreläsningsant.
c) $\frac{}{g})' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$ resp $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$.

Uppgift 5

a) Funktionsvärdena i punkten $(-1, 2)$ beräknas till $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 1$ resp. $x_1^2 - 2\,x_1 - x_2 = 1$, och de partiella derivatorna till $2x_1 = -2$, $2x_2 = 4$, $2x_1 - 2 = -4$ och -1. Detta ger för "steget" (z_1, z_2) ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2z_1 + 4z_2 = -1 \\ -4z_1 - z_2 = -1, \end{cases}$$

med lösning $(z_1, z_2) = (5/18, -2/18)$, vilket ger den nya punkten $(-1 + z_1, 2 + z_2) = (-13/18, 34/18)$.
b) $|x_{i+1} - \bar{x}| \le C\,|x_i - \bar{x}|^2$, dvs resterande fel minskar kvadratiskt.