Tentamen i Matematisk analys i en variabel Kf & Kb, del A, 1999-10-18.

Lösningar

==

Uppgift 1.

(a) $(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(4 - x^2)$ med definitionsmängd $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1/\sqrt{4 - x^2}$ med definitionsmängd $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$

(c) $f^{-1}(x) = 1/x^2$ med definitionsmängd $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, ty $y = 1/\sqrt{x}$ ger $x = f^{-1}(y) = 1/y^2, y > 0$.

Uppgift 2.

Har att $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y|\,|x - y| \leq 4|x - y|$ för $x, y \in [1, 2]$, dvs $f(x) = x^2$ Lipschitz kontinuerlig med $L = 4$.

För godtyckligt L gäller $|f(x) - f(y)| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{y-x}{xy}| = \frac{1}{xy}|x - y| > L|x - y|$ om t.ex. $y = 1$ och $x = /(2L)$. Dvs $f(x) = 1/x$ kan ej vara Lipschitz.

Uppgift 3.

(a) Talet $2^{1/3}$ är lösningen till ekvationen $f(y) = y^3 = 2$.

(b) Satsen om mellanliggande värden garanterar lösning till ekvationen $f(y) = c$ om det finns a och b sådana att $f(a) < c$ resp $f(b) > c$ och $f(y)$ Lipschitz kontinuerlig på intervallet $[a, b]$. Här gäller $f(0) = 0 < 2$ och $f(2) = 8 > 2$ och $f(y) = y^3$ är Lipschitz kontinuerlig på $[0, 2]$, ty $|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |(x^2 + xy + y^2)(x - y)| \leq |x^2 + xy + y^2|\,|x - y| \leq 12|x - y|$ för $x, y \in [0, 2]$.

(c) Ja, ty $f(y) = y^3$ strängt växande för $y \geq 0$: $y_2 > y_1$ ger $f(y_2) - f(y_1) = y_2^3 - y_1^3 = (y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2)(y_2 - y_1) > 0$, ty båda faktorena strängt positiva! Två olika y kan därmed ej båda ge $f(y)$-värdet 2, vilket ger entydigheten.

Uppgift 4.

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kontraktion* om $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}$, för något $L < 1$.

(b) Noterar först att $|x_{j+1} - x_j| = |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq L|x_j - x_{j-1}| \leq .. \leq L^j|x_1 - x_0|$. För $i > j$, $L < 1$ och godtyckligt $\epsilon > 0$ fås $|x_i - x_j| \leq |x_i - x_{i-1}| + |x_{i-1} - x_{i-2}| + .. + |x_{j+1} - x_j| \leq (L^{i-1} + L^{i-2} + .. + L^j)|x_1 - x_0| = \frac{L^j - L^i}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{L^j}{1-L} \leq \epsilon$ om j tillräckligt stort, ty $L^j \to 0$ då $j \to \infty$. Detta visar att följden Cauchy.

(c) Eftersom g Lipschits gäller att $g(\bar{x}) = g(\lim x_j) = \lim g(x_j) = \lim g(x_{j+1}) = \bar{x}$, vsv.

(d) Har att $|g(x) - g(y)| = |\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2+y}| = |\frac{y-x}{(2+x)(2+y)}| \leq \frac{1}{4}|x-y|$ för $x, y \geq 0$, dvs $g(x) = \frac{1}{2+x}$ är en kontraktion.

Uppgift 5.

(a) f differnetierbar i $\bar{x}$ om det finns k så att $f(x) = f(\bar{x}) + k(x - \bar{x}) + E$ och $|E| \leq K|x - \bar{x}|^2$ för x nära $\bar{x}$, med K oberoende av x (kan ej finns flera sådana k). Om f differentiebar, så att sådant k finns, definieras derivatan $f'(\bar{x}) = k$.

(b) Se boken!

(c) Om $x_i \to \bar{x}$ då $i \to \infty$ och $f(x)$ och $g(x)$ är differentierbara med $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$, $g(x_i) \neq 0$, och $g'(\bar{x}) \neq 0$ så gäller $\lim_{i\to\infty} \frac{f(x_i)}{g(x_i)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$.