TMA196 Analys och linjär algebra K/Kb/Kf, del a, 2001-10-24
Hjälpmedel: Endast penna, radergummi och linjal.
Telefonjour/rond: Fredrik Altenstedt, tel. 0740-459022. Fråga gärna!

Varje uppgift kan ge max 10 poäng. För godkänt krävs 25 poäng.

==

Uppgift 1

Sätt $a = (2, 3)$ och $b = (4, 5)$. Beräkna (samt tolka/åskådliggör geometriskt om möjligt)
a) linjärkombinationen $2a - b$ av vektorerna a och b
b) projektionen $P_a(b)$ av b på (i riktning) a
c) kryss/vektorprodukten $a \times b$
d) kvoten a/b, med a och b tolkade som *komplexa tal*
e) en ekvation för *linjen* genom *punkten* a och med *normal* b.

Uppgift 2

a) Vad menas med (dvs *definiera*) x^r för $x > 0$ och *rationell* exponent $r = p/q$.
b) Bevisa någon av potenslagarna (t.ex. $x_1^r\, x_2^r = (x_1\, x_2)^r$ eller $x^{r_1}\, x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$) för rationella exponenter, utgående från potenslagarna för heltalsexponenter, och definitionen i a), av x^r för rationella r.

Uppgift 3

a) Visa att ekvationerna $x^3 + 4\,x - 1 = 0$ och $x = \frac{1}{x^2+4}$ är *ekvivalenta*, dvs har samma lösningar.
b) Visa, utgående från en av ekvationerna (valfritt vilken), genom att hänvisa till/citera lämplig sats, att ekvationerna har (minst) en (reell) lösning $\bar{x}$. Åberopad sats behöver ej bevisas, men förutsättningarna i satsen måste förstås vara uppfyllda, vilket visas med analys eller motivering utifrån en tydlig figur.
c) Visa att denna (reella) lösning är *entydigt bestämd*, dvs att det inte kan finnas flera (olika) reella lösningar i det aktuella fallet.
d) Hur många (komplexa) lösningar har ekvationerna?

Uppgift 4

Betrakta funktionen $f(x) = x^3$ och kalkylen

$$x^3 = (\bar{x} + (x - \bar{x}))^3 = \bar{x}^3 + 3\,\bar{x}^2\,(x - \bar{x}) + 3\,\bar{x}\,(x - \bar{x})^2 + (x - \bar{x})^3.$$

a) Vad säger kalkylen om möjligheten att *linearisera* $f(x)$ nära $\bar{x}$, och om existens av en "derivata" $f'(\bar{x})$? Ge även en geometrisk tolkning i termer av en "tangent", gärna konkretiserad till fallet $\bar{x} = 1$ med angivande av ekvationen för densamma.
b) Ange och *härled*/motivera formeln för derivatan av $f(x)\,g(x)$.
c) Ange formlerna för derivering av $\frac{f(x)}{g(x)}$ och $f(g(x))$.

Var god vänd!

Uppgift 5

a) Genomför en iteration med Newtons metod för lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

utgående från punkten $(x_1, x_2) = (-1, 2)$.

b) Vad menas med att Newtons metod (normalt) uppvisar "kvadratisk konverges"?