Tentamen i Analys och linjär algebra Kf & Kb, del A, 2000-10-14.

Telefonjour/rond: Johan Hoffman, tel. 0740-459022

Tillåtna hjälpmedel: Inga!

=======================================

Uppgift 1.

(a) Motivera/bevisa distributiva lagen för naturliga tal m, n och p.

(b) Visa att distributiva lagen gäller även för rationella tal $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ och $\frac{r}{s}$.

(c) Har ekvationen $x^2 = 2$ någon rationell lösning $x = \frac{p}{q}$? Motivera!

Uppgift 2.

(a) Formulera Bolzano's sats om existens av lösning till $f(x) = 0$, samt redogör kortfattat för beviset av densamma med hjälp av bisektion.

(b) Visa med hjälp av nämnda sats att ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ har (åtminstone) tre reella lösningar.

Uppgift 3.

För $f(x) = x^p$ med heltalsexponent p gäller $f'(x) = px^{p-1}$. (1)

(a) Verifiera detta för $p = 2$, alternativt $p = -1$.

(b) Formulera kedjeregeln för derivering av $g(f(x))$.

(c) Visa att även $f(x) = x^r$ med rationell exponent $r = p/q$, dvs $f(x) = y$ definerad av $y^q = x^p$, deriveras som i (1).

Uppgift 4.

(a) Definiera (ortogonala) projektionen $P_b x$ av en vektor x på en given vektor b, dels med en formel för beräkning av $P_b x$, dels med en illustrerande figur.

(b) Bestäm för given vektor b en matris A sådan att $P_b x = Ax$.

(c) Har ekvationen $P_b x = Ax = b$ en eller flera lösningar x? Motivera, gärna geometriskt. Har matrisen A någon invers A^{-1}? Motivera ditt svar!

Var god vänd!!

Uppgift 5.

(a) Visa, utgående från $0 = f(\bar{x}) = f(x_i) + f'(x_i)(\bar{x} - x_i) + E$ med $|E| \leq K|x - \bar{x}|^2$, att Newtons metod normalt är kvadratisk konvergent. Vad menas med 'normalt' här?

(b) Beräkna det första steget i Newtons method för lösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1^3 x_2 + x_2 - 3 = 0 \\ x_1 x_2 - x_2^2 + 1 = 0, \end{cases}$$

utgående från punkten $(1, 2)$.

Lycka till!!/K.E.