Tentamen i Analys och linjär algebra Kf & Kb, del A, 2000-10-14.

Lösningar

==

Uppgift 1.

(a) Se EM2000 uppgift 5.3 och facit.

(b) Se EM2000 uppgift 7.2 och facit.

(c) Se EM2000 avsnitt 14.2.

Uppgift 2.

(a) Se EM2000 kap. 16 (inledningen).

(b) Finner för $f(x) = x^3 - 3x + 1$ att $f(-2) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ och $f(2) = 3 > 0$, dvs $f(x)$ byter tecken mellan -2 och 0, mellan 0 och 1, och mellan 1 och 2. I alla dessa tre intervall måste finnas (minst) en rot enligt satsen, ty $f(x)$ är Lipschitz kontinuerlig på dessa intervall. T.ex. gäller ju att $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^3 - x_2^3 - 3(x_1 - x_2)| = |(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)(x_1 - x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ med $L = 15$ för $x_1, x_2 \in [-2, 2]$.

Uppgift 3.

(a) För $p = 2$ gäller:

$$f(x) - f(\bar{x}) = x^2 - \bar{x}^2 = (x + \bar{x})(x - \bar{x}) = 2\bar{x}(x - \bar{x}) + E,$$

där $E = (x - \bar{x})^2$, dvs $f'(\bar{x}) = 2\bar{x}$, vsv.

För $p = -1$ gäller:

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - x}{x\bar{x}} = (-\frac{1}{\bar{x}^2})(x - \bar{x}) + E$$

där $E = (\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{x\bar{x}})(x - \bar{x}) = \frac{1}{x\bar{x}^2}(x - \bar{x})^2$, dvs $|E| \leq K|x - \bar{x}|^2$ för x nära $\bar{x}$ om t.ex. $K = \frac{2}{|\bar{x}^3|}$, dvs $f'(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}^2}$, vsv.

(b) Om $f(x)$ och $g(y)$ differentierbar så $Dg(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

(c) Deriverar $(f(x))^q = x^p$ som enligt kedjeregeln i b) ger $q(f(x))^{q-1} \cdot f'(x) = px^{p-1}$, dvs $f'(x) = px^{p-1}/(q(x^{p/q})^{q-1}) = p/q\, x^{p-1-\frac{p(q-1)}{q}} = p/q\, x^{p/q-1}$, vsv.

Uppgift 4.

(a) $P_b x = \frac{b \cdot x}{|b|^2} b$

(b) $A = \begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{|b|^2} & \frac{b_1 b_2}{|b|^2} \\ \frac{b_1 b_2}{|b|^2} & \frac{b_2^2}{|b|^2} \end{bmatrix}$

(c) $Ax = b$ har flera lösningar ty kolonnerna i A är båda paralella med b (varför?) och därmed med varandra. Av samma skäl är A inte inverterbar.

Uppgift 5.

(a) Se föreläsningsanteckningarna.

(b) För $f_1(x) = x_1^3 x_2 + x_2 - 3$ och $f_2(x) = x_1 x_2 - x_2^2 + 1$ gäller att $f_1(1,2) = 1$ och $f_2(1,2) = -1$. Vidare gäller att $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2 = 6$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1^3 + 1 = 2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2 = 2$ och $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2 = -3$ för $(x_1, x_2) = (1,2)$. Ekvationerna $0 = f_1(x_1, x_2)$ och $0 = f_2(x_1, x_2)$ ersätts med de linjeariserade ekvationerna $0 = 1 + 6(x_1 - 1) + 2(x_2 - 2)$ och $0 = -1 + 2(x_1 - 1) + (-3)(x_2 - 2)$, dvs med ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

där $z_1 = x_1 - 1$ och $z_2 = x_2 - 2$, med lösning $z_1 = -1/22$ och $z_2 = -4/11$, dvs $x_1 = 1 - 1/22$ och $x_2 = 2 - 4/11$.