Analys o *3D Linjär algebra*

Lektion 16

3D Linjär algebra

Har betraktat *vektorer* av typen

$$(1.2,\,-4.5,\,3.2),\qquad \begin{bmatrix} 2.1 \\ 5.0 \\ 1.7 \end{bmatrix},\qquad \text{etc}$$

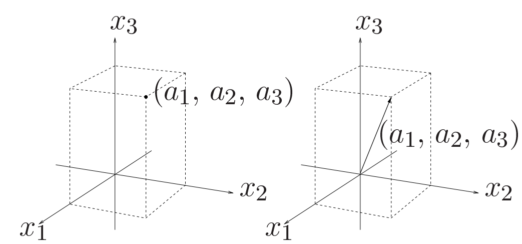
dvs ordnade *triplar* av typen $a = (a_1,\,a_2,\,a_3)$ resp $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ av

reella tal a_i.

3D Linjär algebra

Punkt-vektor dualismen

En ordnad tripel av typen $a = (a_1,\,a_2,\,a_3)$ kan t.ex. representera en punkts *position* i det 3-dimensionella rummet R^3, där $a_1,\,a_2$ och a_3 är punktens *koordinater* i ett givet *koordinat-system* bestående av tre (oberoende) koordinatriktningar, som t.ex. väst-öst, söder-norr, ner-upp, representerade av tre koordinataxlar motsvarande den reella tallinjen med ett gemensamt origo, se figur.



3D Linjär algebra

En sådan tripel kan också tänkas representera samma punkts “läge relativt origo”, och beskrivs då med fördel av en *pil* utgående från origo med utsträckning $a_1,\,a_2$ resp a_3 i de tre koodinatriktningarna. Vi noterar att en sådan *pil* eller *vektor* har sin spets i *punkten* $a = (a_1\,a_2,\,a_3)$.

I tillämpningar representerar punkter *position* och vektorer *förskjutningar (relativlägen), hastigheter, accelerationer och krafter*.

3D Linjär algebra

Skalning och addition av vektorer:

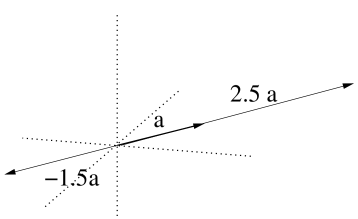
Vektorer/pilar kan (till skillnad från punkter) på ett naturligt sätt *“skalas”*, dvs *multipliceras med skalärer*, dvs *tal*:

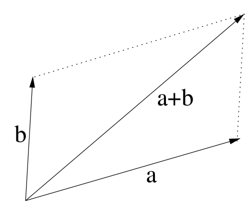
$$\lambda\, a = \lambda\,(a_1,\, a_2,\, a_3) = (\lambda\, a_1,\, \lambda\, a_2,\, \lambda\, a_3),$$

och *adderas*:

$$a + b = (a_1,\, a_2,\, a_3) + (b_1,\, b_2,\, b_3) = (a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3).$$

3D Linjär algebra





Som vanligt skriver vi $(-1)\, b$ som $-b$ och $a + (-1)b$ som $a - b$.

Vektorn $0 = (0,\, 0,\, 0)$ kallas *nollvektorn*. Notera de två olika “typerna” av nollor här!

3D Linjär algebra

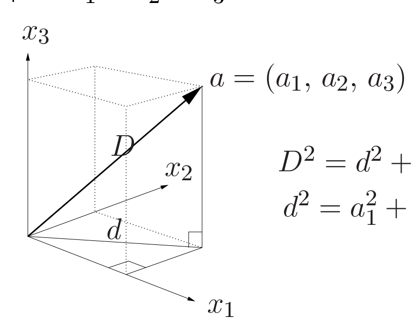
Följande räknelagar kan nu verifieras:

- $a + b = b + a$ dvs additionen *kommutativ*
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ och *associativ*
- $(s + t)\, a = s\, a + t\, a$ och $s\,(a + b) = s\, a + s\, b$ *distributiva lagarna*
- $(s\, t)\, a = s\,(t\, a)$, $1\, a = a$, $0\, a = \mathbf{0}$

3D Linjär algebra

En vektors norm, dvs Euclidiska längd

Längden $|a|$ av en vektor $a = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ ges enligt Pythagoras av $|a|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.



$$D^2 = d^2 + a_3^2$$
$$d^2 = a_1^2 + a_2^2$$

I Matlab: length(a) ger 3, norm(a) ger $|a|$.

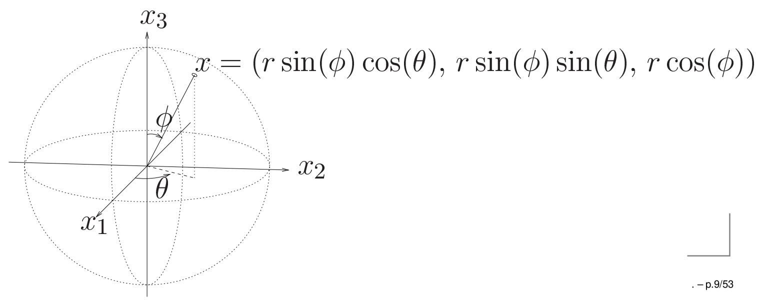
3D Linjär algebra

Polär framställning av vektorer:

Vektorer kan även beskrivas med hjälp av s.k. *(rymd)polära* koordinaterna r, θ och ϕ (se figur) som

$$a = (r\,\sin(\phi)\cos(\theta),\ r\,\sin(\phi)\sin(\theta),\ r\,\cos(\phi)),$$

där alltså $r = |a|$.



3D Linjär algebra

Vi noterar speciellt att $\frac{1}{|a|}\,a\ (= \frac{a}{|a|})$ ger en vektor med samma riktning som a, dvs parallell med a, men *normaliserad*, dvs med längd $= 1$.

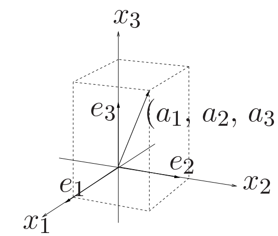
3D Linjär algebra

Bas

Vektorerna $e_1 = (1,\,0,\,0)$, $e_2 = (0,\,1,\,0)$ och $e_3 = (0,\,0,\,1)$ utgör (tills.) en *bas* för vektorerna i rummet, dvs varje vektor $a = (a_1,\,a_2,\,a_3)$ kan skrivas som en *linjärkombination* av e_1, e_2 och e_3 som

$$a_1\,e_1 + a_2\,e_2 + a_3\,e_3,$$

ty $\quad (a_1,\,a_2,\,a_3) = a_1\,(1,\,0,\,0) + a_2\,(0,\,1,\,0) + a_3\,(0,\,0,\,1) = a_1\,e_1 + a_2\,e_2 + a_3\,e_3$.



3D Linjär algebra

Skalär produkt:

Har tidigare definierat "skalning" av en vektor genom multiplikation med ett (reellt) tal λ, och (i Matlab) har vi stött på komponentvis multiplikation av vektorer betecknad $a.*b = (a_1\,b_1,\,a_2\,b_2,\,a_3\,b_3)$. Vi skall nu definiera en ny typ av produkt av två vektorer där resultatet är skalärt, dvs ett *tal*, kallad *skalära produkten* av a och b, och definerad som

$$a \cdot b = (a_1,\,a_2,\,a_3)\cdot(b_1,\,b_2,\,b_3) = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3.$$

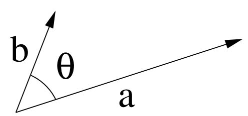
3D Linjär algebra

Har tidigare sett att signifikativt för denna produkt är att vektorerna a och b är *ortogonala*, dvs vinkelräta mot varandra, om och endast om $a \cdot b = 0$.

Mera allmänt gäller:

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos(\theta),$$

där θ är vinkeln mellan a och b.



3D Linjär algebra

Skalärprodukt och längd:

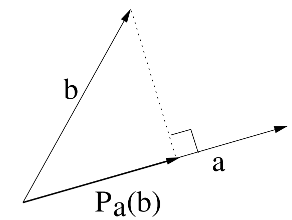
Noterar speciellt att $a \cdot a = |a|\,|a| = |a|^2$, dvs $|a| = (a \cdot a)^{1/2}$, dvs det finns en naturlig koppling mellan skalärprodukt och längd.

3D Linjär algebra

Projektion av en vektor b på en vektor a:

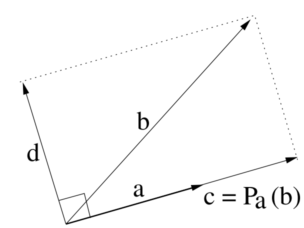
En vektor b's komponent i riktning a kallas *projektionen av b på a*, betecknas $P_a(b)$, och definieras

$$P_a(b) = \frac{a \cdot b}{a \cdot a}\, a = \frac{b \cdot a}{|a|^2}\, a.$$



3D Linjär algebra

Motivet för denna konstruktion är bl.a. att man vill kunna dela upp en vektor b i en komponent c *parallell* med a och en komponent d *ortogonal* mot a, så att $b = c + d$. Klart att det här räcker att bestämma c eftersom d sedan bestäms av $d = b - c$. Komponenten c parallell med a ges av projektionen $P_a(b)$.



3D Linjär algebra

Formeln för $c = P_a(b)$ motiveras av att $P_a(b)$ skall vara parallel med a, dvs

$$P_a(b) = \lambda\, a$$

för något tal λ, och att $d = b - P_a(b)$ skall vara ortogonal mot a, dvs $(b - \lambda\, a) \cdot a = 0$ som ju ger

$$\lambda = \frac{b \cdot a}{a \cdot a},$$

dvs

$$P_a(b) = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}\, a.$$

3D Linjär algebra

Vektorprodukt av vektorer:

Denna produkt av 3d-vektorer $a = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ och $b = (b_1,\, b_2,\, b_3)$ defineras då

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1,\, a_2,\, a_3) \times (b_1,\, b_2,\, b_3) \\ &= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\; a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\; a_1\, b_2 - a_2\, b_1). \end{aligned}$$

Vi noterar att i specialfallet med vektorer “i planet”, dvs med $a_3 = b_3 = 0$ reduceras denna produkt till

$$a \times b = (0,\, 0,\, a_1\, b_2 - a_2\, b_1),$$

vilket vi tidigare tillåtit oss att “förkorta” till

$$a \times b = a_1\, b_2 - a_2\, b_1.$$

3D Linjär algebra

Vilka egenskaper har då denna nya produkt?

Jo, $a \times b$ är *ortogonal* mot såväl a som b:

$$\underbrace{(a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\; a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\; a_1\, b_2 - a_2\, b_1)}_{a \times b} \cdot \underbrace{(a_1,\, a_2,\, a_3)}_{a} = 0.$$

Analogt är $a \times b \cdot b = 0$.

Vektorerna a, b och $a \times b$ bildar ett *högersystem*.

Noterar också att $a \times b = -b \times a$, dvs kryssprodukten är *antikommutativ*!

3D Linjär algebra

Vidare klart att *längden* av vektorn $a \times b$ är proportionell mot såväl a’s längd som b’s längd, dvs $|a \times b| = k\, |a|\, |b|$.

Mera precist gäller att

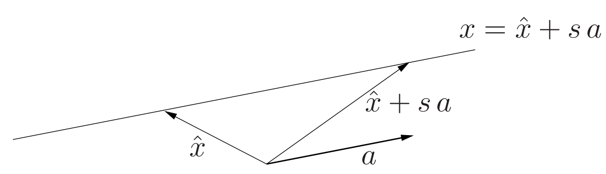
$$\begin{aligned} |a \times b|^2 &= |(a_2\, b_3 - a_3\, b_2,\; a_3\, b_1 - a_1\, b_3,\; a_1\, b_2 - a_2\, b_1)|^2 \\ &= a_2^2\, b_3^2 + a_3^2\, b_2^2 - 2\, a_2 b_3\, a_3 b_2 + a_3^2\, b_1^2 + .. \\ &= \underbrace{a_1^2\, b_1^2 + a_2^2\, b_3^2 + a_3^2\, b_2^2 + a_2^2\, b_2^2 + ..}_{|a|^2\, |b|^2} \\ &\quad - \underbrace{\left((a_1\, b_1)^2 + (a_2\, b_2)^2 + (a_3\, b_3)^2 + 2\, a_2 b_2\, a_3 b_3 + ..\right)}_{(a \cdot b)^2} \\ &= .. = |a|^2\, |b - P_a(b)|^2 = (|a|\, |b|\, \mathrm{sin}(\theta))^2, \end{aligned}$$

där θ är vilkeln mellan a och b, dvs $|a \times b|$ är *arean* av parallellogrammen som spänns upp av a och b.

3D Linjär algebra

Räta linjens ekvation:

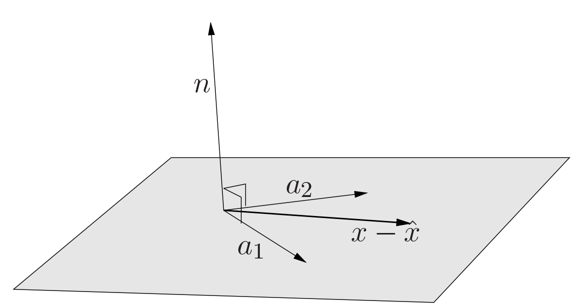
Ekvationen $x = \hat{x} + s\,a, s \in R$ representerar en *rät linje* genom punkten $\hat{x}$ parallell med a:



3D Linjär algebra

Planets ekvation:

Ekvationen $x = \hat{x} + s_1\,a_1 + s_2\,a_2, s_i \in R$ representerar ett *plan* genom punkten $\hat{x}$ ortogonalt mot $a_1 \times a_2$:



3D Linjär algebra

Planets ekvation:

Vi noterar att planets ekvation även kan skrivas $n \cdot (x - \hat{x}) = 0$, dvs $n \cdot x = d$ där $d = n \cdot \hat{x}$.

Exempel: Planet genom punkten $(1,\,1,\,-1)$ med normal $n = (2,\,1,\,-3)$ kan skrivas

$$(2,\,1,\,-3) \cdot (x_1,\,x_2,\,x_3) = (2,\,1,\,-3) \cdot (1,\,1,\,-1),$$

dvs

$$2\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 = 6.$$

3D Linjär algebra

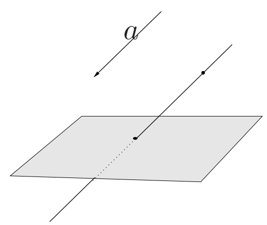
Planets ekvation:

Ett plan givet på formen $x = \hat{x} + s_1\,a_1 + s_2\,a_2$ kan förstås lätt skrivas på formel $n \cdot (x - \hat{x}) = 0$ eller $n \cdot x = d$ genom att ta $n = a_1 \times a_2$. Omvänt kan ett plan givet på formen $n \cdot (x - \hat{x}) = 0$ skrivas om på formen $x = \hat{x} + s_1\,a_1 + s_2\,a_2$ genom att ta a_1 som godtycklig vektor ortogonal mot n och sedan ta a_2 som $n \times a_1$, t.ex
Exempel: $\underbrace{(2,\,1,\,-3)}_{n} \cdot \underbrace{(x_1,\,x_2,\,x_3)}_{x} = \underbrace{(2,\,1,\,-3)}_{n} \cdot \underbrace{(1,\,1,\,-1)}_{\hat{x}}$ kan skrivas som $x = \hat{x} + s_1\,a_1 + s_2\,a_2$ med $\hat{x} = (1,\,1,\,-1)$,
$a_1 = (1,\,-2,\,0)$ och
$a_2 = n \times a_1 = (2,\,1,\,-3) \times (1,\,1,\,-1) = (2,\,-1,\,1)$.

3D Linjär algebra

Skärning linje - plan:

Skärningspunkten mellan en linje $x = \hat{x} + s\,a$ och ett givet plan bestäms förstås genom insättning i ekvationerna för planet.



3D Linjär algebra

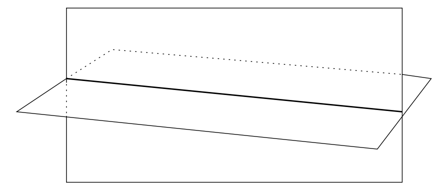
Exempel: Linjen

$$x = (1,\,2,\,3) + s\,(4,\,5,\,6) = (\overbrace{1+4\,s}^{x_1},\,\overbrace{2+5\,s}^{x_2},\,\overbrace{3+6\,s}^{x_3})$$

skär planet $2\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 = 6$ i punkten motsvarande $s = -11/5$, ty bestäms av $2\,(1+4\,s) + (2+5\,s) - 3\,(3+6\,s) = 6$.

3D Linjär algebra

Skärning mellan två plan ger en rät linje:



Exempel: Planen $x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 5$ och $3\,x_1 - 2\,x_2 + 5\,x_3 = 7$ skär varandra längs linjen $x = (3,\,1,\,0) + s\,(1,\,2,\,3) \times (3,\,-2,\,5)$, där punkten $\hat{x} = (3,\,1,\,0)$ på linjen erhållits genom att söka lösning till de två planens ekvationer med $x_3 = 0$, och linjens riktningsvektor a erhållits genom att “kryssmultiplicera” de två planens normaler.

3D Linjär algebra

Vi noterar att en linje därför även kan ges som ett system av ekvationer motsvarande två plan. Två sådana plan-ekvationer kan erhållas t.ex. genom att eliminera parametern s i $x = \hat{x} + s\,a$ som följer:

$(x_1,\,x_2,\,x_3) = (1,\,2,\,3) + s\,(4,\,5,\,6)$ kan skrivas t.ex. som

$$\begin{cases} (x_1 - 1)/4 = (x_2 - 2)/5 \\ (x_2 - 2)/4 = (x_3 - 3)/6 \end{cases}$$

motsvarande två plan.

3D Linjär algebra

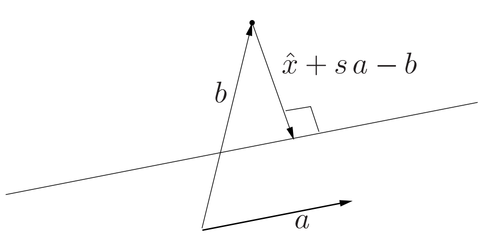
Avståndet mellan två punkter:

Avståndet d mellan punkterna $x = (x_1, x_2, x_3)$ och $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ ges enligt Pythagoras av

$$d^2 = (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + (x_3 - \hat{x}_3)^2.$$

3D Linjär algebra

Avståndet från en punkt b till en given linje $x = \hat{x} + s\,a$:
Söker först s sådan att $\hat{x} + s\,a - b$ är ortogonal mot a. Detta ger $s = (b - \hat{x}) \cdot a/|a|^2$ varefter avståndet lätt kan bestämmas.



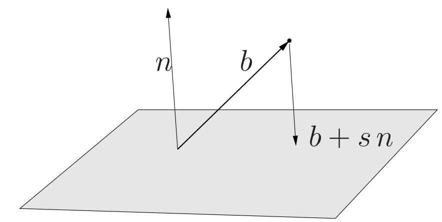
Finns också en avståndsformel som bygger på kryssprodukt:

$$d = \frac{|(b - \hat{x}) \times a|}{|a|}$$

3D Linjär algebra

Avståndet från en punkt b till ett plan $n \cdot (x - \hat{x}) = 0$:

Följer normalriktningen n från b till planet, dvs bestämmer s så att $b + s\,n$ ligger i planet. Sedan fås avståndet lätt.



3D Linjär algebra

Avståndet linje-linje:

Avståndet mellan två givna linjer $x = \hat{x} + s\,a$ och $x = \bar{x} + t\,b$ ges av att kortaste sträckan mellan de två linjerna skall vara ortogonal mot både a och b. Detta bestämmer s och t, varefter avståndet kan beräknas.

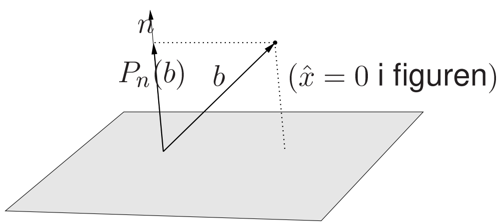
Exempel: ..

3D Linjär algebra

Projektion på ett plans normal: Ett elegantare sätt att beräkna avståndet från en given punkt b till ett plan genom $\hat{x}$ med normal n, är att helt enkelt projicera vektorn $b - \hat{x}$ på planets normal n, dvs beräkna

$$P_n(b - \hat{x}) = \frac{(b - \hat{x}) \cdot n}{|n|^2},$$

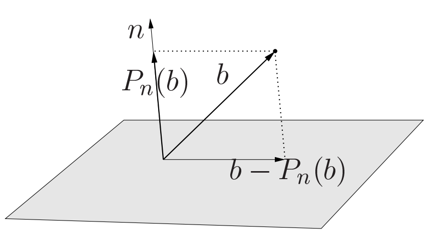
och dess belopp $|P_n(b - \hat{x})|$ som ger det sökta avståndet.



3D Linjär algebra

Projektionen av en vektor b på ett plan $n \cdot x = 0$: ges av (se figur)

$$b - P_n(b).$$



Klart att denna ortogonal mot n, dvs ligger i planet, ty $n \cdot (b - P_n(b)) = n \cdot b - n \cdot (\frac{b \cdot n}{|n|^2}\, n) = 0.$
Vidare är $b - (b - P_n(b)) = P_n(b)$ ju ortogonal mot planet, dvs $b - P_n(b)$ är den angivna projektionen.

3D Linjär algebra

Alternativt måste projektionen av b på ett plan genom origo förstås ges av $s_1\, a_1 + s_2\, a_2$ för något s_1 och s_2. För att $b - (s_1\, a_1 + s_2\, a_2)$ skall bli ortogonal mot såväl a_1 som a_2 måste gälla:

$$\begin{cases} (b - (s_1\, a_1 + s_2\, a_2)) \cdot a_1 = 0 \\ (b - (s_1\, a_1 + s_2\, a_2)) \cdot a_1 = 0, \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} a_1^2\, s_1 + a_2\, a_1\, s_2 = b \cdot a_1 \\ a_1\, a_2\, s_1 + a_2^2\, s_2 = b \cdot a_2, \end{cases}$$

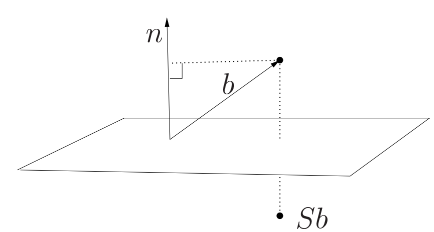
vilket ger s_1 och s_2, och därmed projektionen. Noterar att i specialfallet a_1 och a_2 ortonormerade gäller $s_i = b \cdot a_i$.

3D Linjär algebra

En punkts spegelbild i ett plan:

Spegelbilden av en punkt b i ett givet plan $n \cdot x = 0$ kan nu beräknas enligt (se figur)

$$Sb = b - 2\,\frac{b \cdot n}{|n|^2} n$$

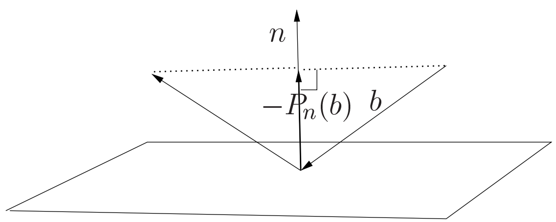


3D Linjär algebra

En stråles reflektion i ett plan:

Infallande ljus (?) med riktning b reflekteras i planet $n \cdot x = 0$ i riktning (se figur)

$$b - 2\,P_n(b).$$



3D Linjär algebra

Linjära ekvationssystem:

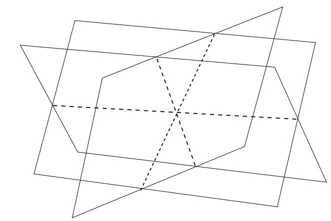
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, .., m,$$

skrivs på kompakt form som $A\,x = b$ med

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ . & . & .. & . \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{in} \\ . & . & .. & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ b_i \\ . \\ b_m \end{bmatrix}.$$

3D Linjär algebra

Geometrisk tolkning: m plan i n-dimensionellt x-rum:



3D Linjär algebra

Noterar att

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ a_{31}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ a_{32}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13}x_3 \\ a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \sum_j a_{2j}x_j \\ \sum_j a_{3j}x_j \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

dvs $A\,x = b$ betyder att b är en (linjär)kombination av kolonnerna i A.

Matris-vektor multiplikation

Exempel:

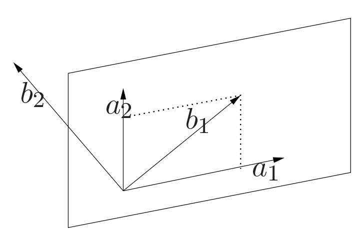
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

med lösning $x_1 = -\frac{5}{11}$ och $x_2 = ...$

Ekvationssystemet har lösning om b ingår i A's "*kolonnrum*".

3D Linjär algebra

Geometrisk tolkning: A har två 3-dimensionella kolonner a_1 och a_2.

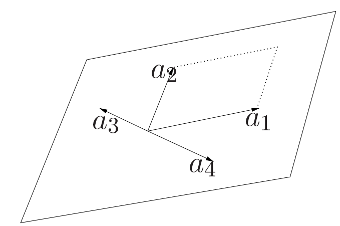


b_1 ingår i A's kolonnrum, b_2 gör det inte.

3D Linjär algebra

a_1 och a_2 "spänner upp" en parallellogram med "volym" (area) skild från noll, och därmed ett helt plan! Säger att a_1 och a_2 är *oberoende* och bildar en *bas* för vektorerna i planet.

bas "=" oberoende och spänner upp

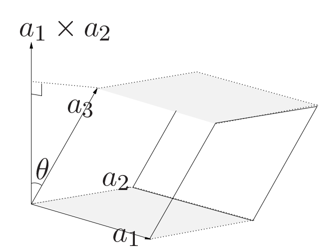


a_3 och a_4 däremot är *beroende*, spänner (endast) upp en parallellogram med volym $= 0$, och därmed inte hela planet!

3D Linjär algebra

Analogt spänner tre 3-dimensionella vektorer a_1, a_2 och a_3 upp en parallellogram med volym

$$a_1 \times a_2 \cdot a_3 = \underbrace{|a_1 \times a_2|}_{\text{basarea}} \underbrace{|a_3| \cos(\theta)}_{\text{höjd}}$$

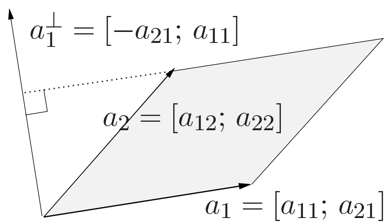


Matrisalgebra

Volymen av den parallellogram som kolonnerna $a_i,\ i=1,..,n$ i en *kvadratisk* matris A spänner upp, räknad med tecken, kallas matrisens *determinant* och betecknas det$A$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Erinrar oss att detta ger volymen (arean) $[-a_{21};\ a_{11}] \cdot [a_{12};\ a_{22}] = a_1^{\perp} \cdot a_2$ av parallellogrammen:



Matrisalgebra

Analogt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A =$$

$$a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Noterar att

$$\underbrace{(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22},\ a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32},\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}_{a_1 \times a_2} \cdot \underbrace{(a_{13},\ a_{23},\ a_{33})}_{a_3} = \det A$$

Matrisalgebra

För determinanter gäller vidare

- det$A$ = detA^T
- om två kolonner byter plats byter determinanten tecken
- om två kolonner är lika (eller parallella) är determinaten $= 0$
- om en kolonn skalas skalas determinaten lika mycket
- två rad/kolonnekvivalenta matriser har samma determinant

Matrisalgebra

Matrisalgebra:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{in} \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} . & b_{1j} & .. & . \\ . & b_{2j} & .. & . \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ . & b_{nj} & .. & . \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \\ . & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} & .. & . \\ . & . & .. & . \\ . & . & .. & . \end{bmatrix}}_{AB}$$

Observera: I allmänhet gäller att $AB \neq BA$.
Däremot gäller $A(B+C) = AB + AC$ och $(AB)C = A(BC)$.

Matrisalgebra

Gauss eliminationsmetod:
Om A kvadratisk och det$A \neq 0$:

$$[A\,|\,b] \sim [I\,|\,x] \quad (x = A\backslash b \text{ i matlab})$$

där I betecknar en “enhetsmatrisen”, med ettor på diagonalen och nollor för övrigt.
Noterar att

$$\begin{cases} r_i \cdot x = b_i \\ r_j \cdot x = b_j \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r_i \cdot x = b_i \\ r_j \cdot x + c\,r_i \cdot x = b_j + c\,b_i \end{cases}$$

Matrisalgebra

Analogt:
Jacobis metod:

$$[A\,|\,I] \sim [I\,|\,A^{-1}] \quad (x = \text{inv}(A) \text{ i matlab}),$$

där *inversmatrisen* A^{-1} har egenskapen $A^{-1}A = I$ och $A\,A^{-1} = I$.

Matrisalgebra

Cramers regel:

$$x_i = \frac{\det(A(:,i) = b)}{\det A}.$$

Matrisalgebra

För *kvadratiska* matriser gäller alltså:
Om det$A \neq 0$ så är $A\,x = b$ entydigt lösbart för alla b, och $x = A^{-1}b$, då ju

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\,x = A^{-1}b.$$

Omvänt, om $A\,x = b$ är entydigt lösbart för alla b så finns matris C sådana att $A\,C = I$ varav måste gälla att det$C \neq 0$ (ty kan även visas att detAC = det$A$ det$C$) varav följer att A är inverterbar med invers $A^{-1} = C$.

Minsta kvadratmetoden

Överbestämda ekvationssystem:
Ett överbestämt ekvationssystem $A\,x = b$ med $m > n$ saknar i allmänhet exakt lösning x, eftersom kolonnerna i A bara är n till antalet i ett m-dimensionellt rum.

Minsta kvadratmetoden:

$$A^T\,A\,x = A^T\,b$$

ger den (linjär)kombination $A\,x$ av de n kolonnerna i A som ligger närmast b, dvs $A\,x$ är *projektionen* av b på det "plan" som spänns upp av kolonnerna i A. Detta framgår av att

$$A^T\,(b - A\,x) = 0,$$

dvs *residualen* $b - A\,x$ är *ortogonal* mot A's kolonner (raderna i A^T).