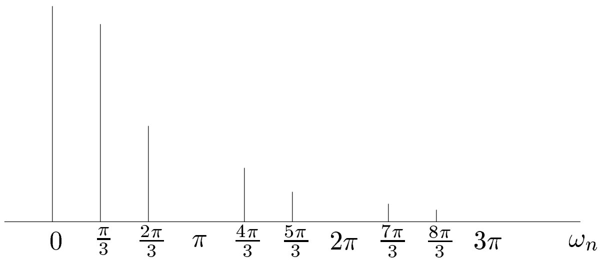

1.

$$
\begin{aligned}
&T = 6,\ \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}\\
&b_n = 0, \quad \text{ty } f \text{ är jämn}\\
&a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t\,dt\\
&\quad = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\cos\frac{n\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{3}\,dt\\
&\quad = \frac{2}{3}\left[\frac{\sin\frac{n\pi t}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\\
&a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 dt = \frac{2}{3}\\
&f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\Big)\\
&\quad = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi t}{3}\\
&\quad = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cos\frac{2\pi t}{3} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\cos\frac{4\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{5\pi}\cos\frac{5\pi t}{3}\\
&\qquad + 0 + \frac{\sqrt{3}}{7\pi}\cos\frac{7\pi t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\cos\frac{8\pi t}{3} + 0 + \cdots
\end{aligned}
$$

Amplitudspektrum:



2. Lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 4xy + 3x$ ges av ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 8x - 4y + 3 = 0\\
f'_y(x,y) &= 6y - 4x = 0
\end{aligned}
$$

med den enda lösningen $x = -\frac{9}{16}$, $y = -\frac{3}{8}$. Vi har alltså en unik extrempunkt nämligen $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$. Hessematrisen är $f''(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4\\ -4 & 6\end{bmatrix}$ med egenvärdena $\lambda_{\pm} = 7 \pm \sqrt{17} > 0$, dvs matrisen är positivt definit. Vi drar slutsatsen att $(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{8})$ är en minimipunkt. Eftersom det inte finns några andra extrempunkter, så är det ett globalt minimum.

3. Den första ekvationen divideras med $q_f c_f$, den andra med $\rho c_p q_f T_f$. Med $\tau = V/q_f$ får vi

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) &= \frac{q}{q_f}\frac{c_f - c}{c_f} - \frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big),\\
\tau\frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) &= \frac{q}{q_f}\frac{T_f - T}{T_f} + \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}\frac{c}{c_f}\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) - \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}\Big(\frac{T - T_f}{T_f} - \frac{T_K - T_f}{T_f}\Big).
\end{aligned}
$$

Med de dimensionslösa variablerna

$$
\begin{aligned}
&s = t/\tau, \\
&X_1(s) = \frac{c_f - c(s\tau)}{c_f}, \quad X_2(s) = \frac{T(s\tau) - T_f}{T_f}, \\
&U_1(s) = \frac{q(s\tau)}{q_f}, \quad U_2(s) = \frac{T_K(s\tau) - T_f}{T_f}, \\
&\alpha = \frac{(-\Delta H)c_f}{\rho c_p T_f}, \quad \beta = \frac{\kappa A \tau}{\rho c_p V}, \quad \gamma = \frac{E}{RT_f}, \quad \delta = \tau k_0 e^{-\gamma}, \quad f(x) = \delta e^{\gamma x/(1+x)},
\end{aligned}
$$

får vi

$$
\frac{c}{c_f} = 1 - X_1, \quad \frac{T}{T_f} = X_2 - 1, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{c}{c_f}\Big) = -\frac{dX_1}{ds}, \quad \tau \frac{d}{dt}\Big(\frac{T}{T_f}\Big) = \frac{dX_2}{ds},
$$

$$
\begin{aligned}
\tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T}\Big) &= \tau k_0 \exp\Big(-\frac{E}{RT_f}\Big)\exp\Big(\frac{E}{RT_f} - \frac{E}{RT_f}\frac{T_f}{T - T_f + T_f}\Big) \\
&= \delta \exp\Big(\gamma - \frac{\gamma}{X_2 + 1}\Big) = \delta \exp\Big(\gamma \frac{X_2}{X_2 + 1}\Big) = f(X_2).
\end{aligned}
$$

Detta leder till det ickelinjära differentialekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_1}{ds} &= -U_1 X_1 + (1 - X_1) f(X_2) && (\ = F_1(X, U)\ ), \\
\frac{dX_2}{ds} &= -U_1 X_2 + \alpha(1 - X_1) f(X_2) - \beta(X_2 - U_2) && (\ = F_2(X, U)\ ).
\end{aligned}
$$

(b) Nu linjäriserar vi kring $\bar{X}, \bar{U}$. Det linjäriserade systemet blir

$$
x'(s) = Ax(s) + Bu(s), \quad s > 0; \quad x(0) = x_0,
$$

med Jacobimatriserna

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial X_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{U}_1 - f(\bar{X}_2) & (1 - \bar{X}_1) f'(\bar{X}_2) \\ -\alpha f(\bar{X}_2) & -\bar{U}_1 + \alpha(1 - \bar{X}_1) f'(\bar{X}_2) - \beta \end{bmatrix},
$$

där

$$
f'(x) = \frac{\gamma}{(1 + x)^2} f(x),
$$

och

$$
B = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_1}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1}(\bar{X}, \bar{U}) & \frac{\partial F_2}{\partial U_2}(\bar{X}, \bar{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{X}_1 & 0 \\ -\bar{X}_2 & \beta \end{bmatrix}.
$$

(c) Lösningar $x(t)$ till det linjäriserade ekvationssystemet är approximationer till störningar av jämviktsläget, $X(t) \approx \bar{X} + x(t)$. Genom att undersöka lösningarna till det linjäriserade systemet får man information om stabiliteten hos små störningar av jämviktsläget. Ett stabilitetsvillkor: systemet är asymptotiskt stabilt (dvs alla störningar går mot noll då $t \to \infty$) om och endast om alla egenvärden λ till Jacobimatrisen A har negativ realdel. Eftersom A är osymmetrisk kan dock $x(t)$ bli stor innan den går mot noll, dvs systemet kan vara instabilt trots att det är asymptotiskt stabilt. Detta kan man undersöka t ex genom att beräkna lösningar numeriskt till det linjäriserade och det ickelinjära systemet.

4. (a) Robins randvillkor

$$
-\lambda T'(L) = h(T(L) - T_f),
$$

anger värmeflödet genom ytan på två sätt: vänsterledet är Fouriers lag, högerledet säger att värmeflödet genom ytan är proportionellt mot skillnaden mellan inner- och yttertemperaturen.

Neumanns randvillkor $T'(0) = 0$ betyder att värmeflödet i mitten av plattan är noll, på grund av symmetri.

(b) Multiplicera ekvationen med $L^2/(\lambda T_f)$ så fås

$$-L^2\frac{T''(x)}{T_f} = -L^2\frac{(-\Delta H)\beta}{\lambda}\frac{T(x)}{T_f}.$$

Multiplicera Robins randvillkor med $L/(\lambda T_f)$ så fås

$$-L\frac{T'(L)}{T_f} = \frac{Lh}{\lambda}\frac{T(L)-T_f}{T_f}.$$

Sätt $r = x/L$, $x = Lr$ och $u(r) = (T(Lr)-T_f)/T_f$, så fås $T(x) = T_f(1+u(r))$, $u'(r) = LT'(Lr)/T_f$, $u''(r) = L^2T''(Lr)/T_f$ och

$$-u''(r) = \phi^2 u(r) + \phi^2, \quad \phi = L\sqrt{(-\Delta H)\beta/\lambda},$$
$$u'(0) = 0,\ u'(1) + \alpha u(1) = 0, \quad \alpha = Lh/\lambda.$$

(c) Differentialekvationen är $u'' + \phi^2 u = -\phi^2$, karakteristiska ekvationen är $p^2 + \phi^2 = 0$ med rötterna $p = \pm j\phi$. Allmänna lösningen till den homogena ekvationen $u'' + \phi^2 u = 0$ blir

$$u_h(r) = A\cos(\phi r) + B\sin(\phi r).$$

En partikulärlösning till den inhomogena ekvationen är $u_p(r) = -1$. Allmänna lösningen blir alltså

$$u(r) = A\cos(\phi r) + B\sin(\phi r) - 1, \quad u'(r) = -A\phi\sin(\phi r) + B\phi\cos(\phi r).$$

Randvillkoren ger

$$0 = u'(0) = B\phi, \text{varav } B = 0,$$

och sedan

$$0 = u'(1) + \alpha u(1) = -A\phi\sin(\phi) + \alpha(A\cos(\phi) - 1),$$

så att

$$A = \frac{\alpha}{\alpha\cos(\phi) - \phi\sin(\phi)} = \frac{1}{\cos(\phi)}\frac{\alpha}{\alpha - \phi\tan(\phi)},$$

och lösningen blir

$$u(r) = \frac{\cos(\phi r)}{\cos(\phi)}\frac{\alpha}{\alpha - \phi\tan(\phi)} - 1.$$

I de ursprungliga variablerna:

$$T(x) = \big(1 + u(x/L)\big)T_f = A\cos(\phi x/L)T_f = \frac{\cos(\phi x/L)}{\cos(\phi)}\frac{\alpha}{\alpha - \phi\tan(\phi)}T_f.$$

(d) Med $\phi = \pi/2$ får vi (med den första varianten av A från ovan)

$$T(0) = \frac{\alpha}{\alpha\cos(\pi/2) - \frac{\pi}{2}\sin(\pi/2)}T_f = -\frac{2\alpha}{\pi}T_f < 0,$$

dvs absoluta temperaturen är negativ. Villkoret för att temperaturen ska vara positiv är

$$\alpha - \phi\tan(\phi) > 0, \quad \text{dvs } \phi\tan(\phi) < \alpha.$$

Detta gäller för ϕ i ett intervall $(0, \phi_0)$. Då $\phi = \phi_0$ får vi noll i nämnaren och temperaturen blir oändligt stor.

Om ϕ är liten (dvs $\phi < \phi_0$) har vi en jämvikt: allt värme som bildas i katalysatorn transporteras ut till omgivningen genom värmeledning. Om man ökar ϕ, t ex genom att öka reaktionshastighetskonstanten β medan övriga konstanter är fixerade, så hinner till slut inte allt värme ledas bort utan temperaturen ökar obegränsat; jämvikt är inte möjlig. Samma sak händer om man minskar värmeledningsförmågan λ, ökar tjockleken L, eller ökar reaktionsentalpin $-\Delta H$.

/stig